АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

2468—2805

*

№ 3 **1954**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

В. В. Алпатов, А. П. Лебедев, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский, Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
Основания математики и математическая логика 4
Теория чисел 9
Алгебра 14
Многочлены и линейная алгебра . . . . . —
Группы 14
Поля, кольца и структуры 16
Топология 18
Теория функций действительного переменного 19
Приближение функций полиномами и их обобщениями 20
Теория функций комплексного переменного 20
Дифференциальные уравнения 24
Обыкновенные дифференциальные уравнения 24
Уравнения в частных производных . . 26
Интегральные уравнения . . . . . —
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 30
Числовые ряды 31
Специальные функции 32
Интегральные преобразования и операционное исчисление 32
Функциональный анализ 33
Теория вероятностей 38
Математическая статистика 41
Теория игр . . . . . —
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 46
Геометрия 47
Проективная и начертательная геометрия 49
Алгебраическая геометрия 50
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 50
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 51
Метрические задачи евклидова пространства. Келеровы многообразия 52
Геометрия выпуклых многообразий . . . 53
Численные и графические методы 53
Таблицы 57
Вычислительные машины и математические приборы 57
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
История математики. Биографии 65
Авторский указатель . . . . . I—III

Адрес редакции: Москва, 57, Балтийский пос., д. 42 Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 2468—2805 **№ 3** **Март 1954 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

2468. Об исследованиях в области математики в Советском Союзе. Хуа Ло-гэн (對蘇聯數學研究工作的認識• 華羅庚), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1953, № 8, 4—9 (кит.)

2469. Заседание памяти академика С. А. Чаплыгина. Вестн. АН СССР, 1953, № 4, 103—106

Сообщение об объединенном заседании Моск. об-ва испытателей природы, Моск. мат. об-ва, мех.-мат. и физ. фак-тов МГУ и Моск. высшего техн. училища, посвященном 10-летию со дня смерти С. А. Чаплыгина.

2470. О математических статьях во втором издании БСЭ. Украинский мат. ж., 1953, 5, № 3, 354—360

Приводятся материалы обсуждения математических статей первых 15 томов второго издания БСЭ, происходившего в марте — апреле 1953 г. на заседаниях Ученого совета Института математики АН УССР.

2471. Планирование научно-исследовательской работы Математического института. Куратовский (Planowanie badań naukowych Instytutu Matematycznego. Kuratowski Kazimierz), Nauka Polska, 1953, **1**, № 2, 220—227 (польск.)

Доклад, прочитанный на заседании Президиума Польской академии наук 24 января 1953 г.

2472. III съезд Всемирной федерации работников науки. Якубовский (III zjazd Swiatowej federacji pracowników nauki. Jakubowski Janusz Lech), Życie szkoły wyższej, 1953, **1**, № 11, 110—114 (польск.)

2473. Ноябрьское собрание в Роли (The November meeting in Raleigh), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 1, 52—64 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 485-му собранию Американского математического общества 28—29 ноября 1952 г., в числе которых следующие:

Алгебра и теория чисел

1. О распределении символов Якоби. Брауэр (Brauer A. T.).

2. Заметка о модулярных инвариантах. Карлиц (Carlitz Leonard). Рассматривается система алгебраических форм $f_1, \ldots, f_r$ над полем Галуа $GF(q)$, подвергаемая подстановкам полной линейной группы над $GF(q)$, и структура ее инвариантов.

3. Формула взаимности для взвешенных квадратичных разбиений. Карлиц (Carlitz Leonard). Рассматривается квадратичная форма Q от r переменных над полем Галуа $GF(q)$. При числах $\alpha_i, \lambda_i, \xi_i \in GF(q)$ составляется сумма

$$\sum_{Q(\xi)=\alpha} \exp \frac{2\pi i}{q^n}(2\lambda_1\xi_1 + \ldots + 2\lambda_r\xi_r)$$

и для нее выводится формула взаимности.

4. Инвариантная теория систем уравнений над конечным полем. Карлиц (Carlitz Leonard).

5. Регулярные изотопы почти-колец. Дин (Dean B. V.). Рассматриваются почти кольца (весьма общие системы с двумя операциями) и их изотопные отображения. При некоторых ограничениях изотопия является изоморфизмом.

6. О многообразиях группоидов и луп. Эванс, Нёйман (Evans Trevor, Neumann B. H.). Рассматривается вопрос о мощности многообразий (в смысле Холла) группоидов и луп. Изучаются также некоторые другие вопросы, связанные с лупами.

7. Примитивные тернарные неопределенные квадратичные роды с более чем одним классом. Халлок (Hadlock E. H.). Строятся примеры число коренных тернарных неопределенных форм тс нечисто коренными взаимными формами, причем в их родах содержится не менее двух классов. Первые инварианты делятся, по крайней мере, на 64 (обстоятельство, связанное с теоремами А. Мейера).

8. Характеристика нормальных матриц. Гофман, Таусская (Hoffman A. J., Taussky Olga). Доказывается следующее:

Пусть матрица A имеет собственные значения α_i; если 1) матрица $A + A^*$ имеет собственными значениями числа $\alpha_i + \overline{\alpha_k}$ или 2) матрица AA^* имеет собственными значениями числа $\alpha_i\overline{\alpha_k}$, то матрица A нормальна, т. е. $AA^* = A^*A$.

9. Матрицы, степени A^t которых являются многочленами от t, и главные идемпотентные элементы. Хафф (Huff G. B.). Пусть D — область целостности характеристики $\chi = 0$, D_m — кольцо $m \times m$ матриц. Единицей для матрицы A называется такая матрица E, что $E^2 = E$, $AE = EA = A$. Ос

новной результат: $A-E$ нильпотентная индекса $n+1$ матрица тогда и только тогда, когда существует такой матричный многочлен $F(x) \in D_m[x]$ степени n, что $F(0)=E$, $F(t)=A^t$ для целых положительных t. При помощи этой теоремы легко получаются некоторые классические и новые результаты теории матриц.

10. Линейные дифференциальные уравнения в полях конечной характеристики. Егер (Jaeger Arno). Использованием итеративного дифференцирования, введенного Шмидтом (Schmidt F. K., J. reine und angew. Math., 1952, 190, 4), определяются формальные дифференциальные уравнения в поле F характеристики $p \neq 0$. Далее изучаются линейные дифференциальные уравнения.

11. Матрицы с обобщенными кватернионами в качестве элементов. Ли (Lee T. H.). Обобщенными кватернионами называются элементы кольца Q' с базисом $1, i, j, k$, над полем действительных чисел и таблицей умножения $i^2 = \pm 1, j^2 = \pm 1, ij = k = -ji$. Рассматриваются матрицы над кольцом Q', в частности вопрос о существовании собственных значений.

12. Определение тела в терминах одной операции. Левит (Levit R. J.). Даются две системы аксиом, характеризующих тело в терминах одной операции $a \Delta b$ или $a \nabla b$. С умножением и сложением эти операции связаны так:

$$a \Delta b = a - ab, \quad a \nabla b = 1 - b^{-1}a.$$

13. Замечание о теореме Паркера. Медлин (Medlin G. W.).

14. Эквивалентность полиномиальных матриц. Паркер, Рутледж (Parker W. V., Rutledge W. A.). Доказывается теорема об эквивалентности полиномиальных матриц специального вида. В качестве следствия получаются некоторые уже известные результаты.

15. О характеристическом многочлене произведения двух матриц. Рот (Roth W. E.). Доказана теорема: если матрицы A и B имеют характеристическими многочленами

$$a_0(x^2) - xa_1(x^2) \text{ и } b_0(x^2) - xb_1(x^2)$$

($a_0(t)$, $a_1(t)$, $b_0(t)$, $b_1(t)$ — многочлены), а ранг $A-B$ не больше единицы, то $a_0(x)\,b_0(x) - xa_1(x)\,b_1(x)$ является характеристическим многочленом для AB.

16. Обобщенные коммутаторы матриц. Таусская (Taussky Olga). Доказывается теорема: если определители матриц A и B равны и отличны от нуля, то существуют такие матрицы X и Y, что $A = X^{-1}Y^{-1}BXY$.

17. Новые случаи неприводимости многочленов Лежандра. II. Вахаб (Wahab J. H.). Если степень n многочлена Лежандра $P_n(x)$ имеет вид $n = (p-1) \times (p^{k_1} + p^{k_2} + \ldots + p^{k_r})$, $k_i \neq k_j$, то степени множителей $P_n(x)$ должны иметь такой же вид. Устанавливаются новые случаи неприводимости многочленов Лежандра.

Анализ

18. Неподвижные точки отображений упорядоченных множеств. Гинзбург (Ginsburg Seymour).

19. Заметка об уравнении Лиувилля $Df = 0$. Икенберри (Ikenberry Ernest).

20. Об интеграле, связанном с интегралом Полларда—Мура—Стилтьеса. Инграм (Ingram W. H.).

21. Заметка о гармонических функциях, порожденных аналитическими функциями гиперпеременного. Майлс (Miles E. P.). Рассматриваются функции гиперпеременного $t = x + wy + w^2z$, где $w^3 = 1$.

22. О бесконечности числа простых троек. Мур (Moore C. N.). Рассматриваются тройки простых чисел, соседние из которых отличаются на 2 и 4.

23. Изучение критических множеств функций. Пелличчарро (Pellicciaro E. J.).

24. Об аддитивных свойствах действительных чисел. Предварительное сообщение. Шилдс (Shields A. L.). В частности, утверждается, что $m_0(A+B) \geqslant m_0(A) + m_0(B)$, где m_0 — внешняя мера Лебега, A, B — множества действительных чисел, $A+B = \{a+b\}$, $a \in A$, $b \in B$.

25 Эйлеровы методы суммирования двойных рядов. Уоллан (Wollan G. N.) (РЖМат, 1954, 2210).

Прикладная математика

26. О сходимости приближенных решений двумерного волнового уравнения к точному решению. Хайнд (Hind A. T., Jr).

27. Методы средних в итерационных процессах. Манн (Mann W. R.) (РЖМат, 1954, 2241).

Геометрия

28. Модификация закона параллелограма для характеристики гильбертовых пространств. Эллис (Ellis D. O).

29. Каноническая форма для конформно-плоского симметрического пространства. Левин (Levine Jack). Доказано существование координатной системы, в которой квадратичная форма имеет вид $ds^2 = (1/u^2) \Sigma\, e_i (dx^i)^2 (e_i = \pm 1)$.

Топология

30. Дополнительные пространства декартовых произведений групп и линейных пространств. Эллис (Ellis J. W.).

31. Замечание о трансфинитных последовательностях. Гриффин (Griffin J. S.).

32. Замечания об однородных пространствах. Исбелл (Isbell J. R.).

33. Паракомпактность CW-комплексов. Уолш (Walsh M. J.).

34. Компактные многообразия с однородной комплексной структурой. Ван (Wang H. C.).

2474. Сообщения о докладах (Vortragsberichte), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 25/26, 62—64 (нем.)

Приведены резюме следующих докладов, прочитанных на заседаниях Математического общества в Вене в зимнем семестре 1952/53 г.:

1. О сингулярном интегральном уравнении Кантелли в математической статистике. Сансоне (Sansone G.). Рассматривается вопрос о нетривиальных решениях уравнения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[f(x) \cdot a^2/2 + ax - x^2\right] dx = \sqrt{\pi} \cdot \exp(a^2/4).$$

2. К теории самосопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков. Хамбергер (Hamburger H. L.). Найдены некоторые соотношения между решениями и их производными.

3 Об одной проблеме типа Варинга — Гольдбаха. Прахар (Prachar K.) (РЖМат, 1953, 551).

4. О числах Ферма. Кнёдель (Knödel W.).

5. О некоторых проблемах топологии. Куратовский (Kuratowski K.).

6. Регулярная разрешимость общих линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Хорних (Hornich H.).

7. О принципе конечной площади. Уотерман (Waterman D.). Указывается распространение одной теоремы Лузина и Зигмунда о поведении аналитической функции на границе круга.

8. О локсодромиях тора. Вундерлих (Wunderlich W.).

9. Проективный инвариант трех линейных элементов n-го порядка с общим линейным элементом $(n-1)$-го порядка. Круппа (Kruppa E.).

2475. Сообщения о докладах (Vortragsberichte), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 27/28, 51—53 (нем.)

Сообщается о докладах, прочитанных на заседаниях Математического общества в Вене в летнем семестре 1953 г.; в частности, приведены резюме следующих докладов:

1. Частично упорядоченные пространства и альтернативные формы. Бомпьяни (Bompiani E.). При помощи алгебры альтернативных форм исследуются геометрические свойства линейных пространственных систем.

2. Конгруентное перемещение коллинеарных пространств. Браунер (Brauner H.) (РЖМат, 1953, 869).

3. О преобразованиях абстрактных граф. Сабидусси (Sabidussi G.).

4. Конструирование и применение электронных счетных машин в Геттингене. Хопман (Hopmann W.).

2476. Научный годичный съезд специалистов по прикладной математике и механике с 21 по 25 апреля 1953 г. в Аахене. Гёртлер (Wissenschaftliche Jahrestagung der GaMM, Aachen, 21.—25. April 1953. Görtler H.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 27/28, 12—13 (нем.)

Указаны некоторые доклады, прочитанные на съезде.

2477. Годичное собрание Японского математического общества с 30 мая по 3 июня 1953 г. в Токийском университете. Такасу (Annual meeting of the Japanese mathematical society, Tokyo University, May 30-th to June 3-rd, 1953. Takasu T.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 27/28, 13—14 (англ.)

Приводится программа заседаний.

2478. Список докладов, прочитанных членами Японского математического общества в 1952 г. (年討國法人日本數學會總會記錄), 數學 (Сугаку), 1953, 5, № 1, 57—64 (япон.)

2479. Международная комиссия по преподаванию математики. Курепа (Internationale Mathematische Unterrichtskommission (IMUK). Kurepa G.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 27/28, 10—11 (нем.)

Краткие сведения о состоявшемся в марте 1952 г. в Риме заседании комиссии.

2480. Математика в школе в настоящем и будущем. Снелл (School mathematics today and tomorrow. Snell K. S.), Math. Gaz., 1953, 37, № 321, 161—173 (англ.)

Речь по случаю избрания автора президентом Математической ассоциации Англии на 1953 г. Приводятся соображения по поводу возможных путей развития программ по математике в английских средних школах. Большое внимание уделяется вопросу о реформе преподавания геометрии, в частности в старших («специальных») классах, окончание которых необходимо для поступления в высшее учебное заведение. Предлагается включение в программу элементов синтетической геометрии за счет сокращения метрических методов (аналитической геометрии и приложений тригонометрии). Рассматривается также вопрос об объеме элементов математического анализа в курсе средней школы и их связи с преподаванием физики. *В. И. Левин*

2481. Математические институты (Mathematical institutes), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 25/26, 11—25 (англ., франц., нем.)

Приводятся названия некоторых математических учреждений за рубежом, а также списки профессуры.

2482. Сообщения по Японии. Такасу (Nachrichten. Japan. Takasu T.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 27/28, 14—21 (нем.)

В частности, сообщается, что с 1953 г. в Иокогаме вместо журнала «The Journal of Yokohama Municipal University, ser. D (Mathematics)» будет выходить 2 раза в год «The Yokohama Mathematical Journal».

2483. Труды 4-го Конгресса Итальянского математического общества (Atti del Quarto Congresso dell'Unione Matematica Italiana)

Опубликованы в двух томах (Edizione Cremonese, Rome, 1953). Первый том (324 стр.) содержит общие доклады, второй (684 стр.) — короткие сообщения.

Из Math. Rev., 1953, 14, № 8, 830.

2484 К. Научно-техническая конференция (Ленингр. технол. ин-т). **Тезисы докладов.** 96 стр., Госхимиздат, Л.— М., 1953

Приводятся тезисы докладов, прочитанных на научно-технической конференции Ленинградского технологического института (1953 г.), в частности докладов: Метод организации и проведения математического практикума. Михельсон Н. С.; Обобщение понятий об интеграле и производной на случай дробных порядков. Накоренко Г. В.; К вопросу построения линии пересечения двух цилиндров. Дешевой Г. М.

2485 К. Научно-техническая конференция профессорско-преподавательского состава Института совместно с представителями Инженерно-технического общества и текстильных предприятий г. Ленинграда 1952—1953 гг. (Ленингр. текстильный ин-т). **Тезисы докладов.** 171 стр., Л., 1953.

Тезисы докладов, в частности математических, прочитанных на научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава Ленинградского текстильного института (1952—1953): О разложении вектора-ускорения точки по направлениям осей косоугольных координатных систем. Гавриленко В. А.; Теория субполигармонических функций и некоторые задачи поли-

гармонических функций. Ефрон А. И.; Решение уравнения Лапласа при граничных условиях, заданных на прямой. Маньков Н. А., Измерение больших радиусов кривизны. Прибор и методы измерения. Платонов М. Х.; Анализ причин, приводящих к неудовлетворительным результатам при построении аксонометрических проекций. Григорьев Н. М.

2486 **РЕЦ.** **Основы математического мастерства. Прайс, Ноулер** (Basic skills in mathematics. Price H. Vernon, Knowler Lloyd A., pp. VIII+249, Ginn and Co., New York, 1952, 3.25 doll.) [**Рецензия: Хокинс** (Hawkins George E.), School. Sci. and Math., 1953, **53**, № 6, 506—507 (англ.)]

См. также: 2770

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

2487. **Теорема Гёделя и теория алгоритмов. Успенский В. А.,** Докл. АН СССР, 1953, 91, № 4, 737—740

Говорят, что множество натуральных чисел R порождается функцией φ, если R есть совокупность значений функции φ. Множества, порождаемые частичными рекурсивными функциями, называются рекурсивно перечислимыми. Всякой системе равенств, определяющей частичную рекурсивную функцию, можно соотнести натуральное число — номер этой системы,— по которому система однозначно восстанавливается. Этот номер считается вместе с тем номером функции, определяемой системой равенств, и номером совокупности значений этой функции.

Говорят, что множества E_1 и E_2 отделяются множествами H_1 и H_2, если $E_1 \subseteq H_1$, $E_2 \subseteq H_2$ и $H_1 \cap H_2 = \Lambda$. Говорят, что множества E_1 и E_2 неотделимы, если они не отделяются никакими рекурсивными множествами. Известны примеры непересекающихся неотделимых рекурсивно перечислимых множеств (см. Трахтенброт Б. А., РЖМат, 1953, 13).

Автор называет множества E_1 и E_2 эффективно неотделимыми, если имеется такая частичная рекурсивная функция двух аргументов ν, что всякий раз, когда n_1 и n_2 суть номера рекурсивно перечислимых множеств H_1 и H_2, отделяющих E_1 и E_2, $\nu(n_1, n_2)$ определено, но не принадлежит ни H_1, ни H_2.

Формулируется теорема 1: Существует пара непересекающихся эффективно неотделимых рекурсивно перечислимых множеств.

Автор предлагает следующее определение дедуктивного исчисления. Будем рассматривать некоторый алфавит $\mathfrak{Z}$; слова в нем будем называть «формулами»; некоторые «формулы» $A_1, \ldots, A_p$ (p — натуральное число) будем называть «аксиомами». Введем несколько алгорифмов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ (q — натуральное число), которые будем называть «правилами вывода»; пусть при этом алгорифм Γ_i применим лишь к системам «формул» $X_1, \ldots, X_{k_i}, Y_1, \ldots, Y_{l_i}$, где k_i и l_i — фиксированные неотрицательные числа, и в случае своей применимости пусть Γ_i перерабатывает такую систему «формул» в «формулу» же. Совокупность элементарных знаков алфавита $\mathfrak{Z}$, «аксиом» и «правил вывода» автор предлагает тогда рассматривать как дедуктивное исчисление. При этом для уточнения термина «алгорифм» он вводит допущение: для каждого i должна существовать частичная рекурсивная функция φ_i от $k_i + l_i$ переменных, такая, что всякий раз, когда Γ_i перерабатывает систему формул $X_1, \ldots, X_{k_i}, Y_1, \ldots, Y_{l_i}$ в формулу Z, должно иметь место равенство

$$N(Z) = \varphi_i(N(X_1), \ldots, N(X_{k_i}), N(Y_1), \ldots, N(Y_{l_i})), \quad (1)$$

где $N(X)$ означает номер формулы X в определенной фиксированной нумерации формул.

Выводимость формулы в исчислении определяется индуктивно: все аксиомы считаются выводимыми и выводимой считается всякая формула, в которую какой-либо алгорифм Γ_i перерабатывает систему выводимых формул $X_1, \ldots, X_{k_i}$ и каких-нибудь формул $Y_1, \ldots, Y_{l_i}$. Рассматриваются лишь исчисления «с отрицанием», т. е. исчисления, алфавиты которых содержат знак отрицания $\neg$. Формула $\neg A$ называется отрицанием формулы A.

Пусть $\mathfrak{B}$ — множество формул исчисления Π, обладающее следующими свойствами: а) имеется алгорифм, позволяющий для всякой формулы распознавать, принадлежит ли она $\mathfrak{B}$; б) отрицание всякой формулы, принадлежащей $\mathfrak{B}$, принадлежит $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}(\Pi)$ означает совокупность формул, принадлежащих $\mathfrak{B}$ и выводимых в Π; $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}(\Pi)$ — совокупность формул, принадлежащих $\mathfrak{B}$ и таких, что их отрицания выводимы в Π. Говорят, что исчисление Π непротиворечиво в применении к $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}(\Pi) \cap \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}(\Pi) = \Lambda$; что оно полно в применении к $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}(\Pi) \cup \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}(\Pi) = \mathfrak{B}$. Говорят, что исчисление Π' есть усиление исчисления Π в применении к $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}(\Pi)$ содержится в $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}(\Pi')$. Говорят, что исчисление Π непополнимо в применении к $\mathfrak{B}$, если оно не допускает полного и непротиворечивого усиления в применении к $\mathfrak{B}$.

Пусть $K_{\mathfrak{B}}(\Pi)$ и $L_{\mathfrak{B}}(\Pi)$ означают множества номеров формул, принадлежащих $\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}(\Pi)$ и соответственно $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}(\Pi)$. Автор утверждает, что эти множества рекурсивно перечислимы. При уточнении понятия алгорифма, принятом автором, это утверждение может, однако, быть опровергнуто на простом примере. Чтобы обеспечить рекурсивную перечислимость множеств $K_{\mathfrak{B}}(\Pi)$ и $L_{\mathfrak{B}}(\Pi)$, надо уточнить это уточнение, потребовав, чтобы алгорифм Γ_i тогда и только тогда перерабатывал систему формул $X_1, \ldots, X_{k_i}, Y_1, \ldots, Y_{l_i}$ в формулу Z, когда соблюдается равенство (1). Лишь после этого станет приемлемым дальнейшее.

Формула неразрешима в исчислении Π, если ни она, ни ее отрицание не выводимы в Π. Исчисление

П эффективно непополнимо в применении к $\mathfrak{B}$, если имеется такая частичная рекурсивная функция γ одной переменной, что всякий раз, когда n есть номер рекурсивно перечислимого множества $K_{\mathfrak{B}}(\Pi')$, где Π' — непротиворечивое усиление исчисления Π, $\gamma(n)$ есть номер формулы из $\mathfrak{B}$, неразрешимой в Π'. Исчисление Π разрешимо в применении к $\mathfrak{B}$, если множество $K_{\mathfrak{B}}(\Pi)$ рекурсивно; исчисление существенно неразрешимо в применении к $\mathfrak{B}$, если оно непротиворечиво и не допускает непротиворечивого усиления, разрешимого в применении к $\mathfrak{B}$; исчисление регулярно в применении к $\mathfrak{B}$, если для всякой формулы A, принадлежащей $\mathfrak{B}$, из выводимости A следует выводимость $\neg\neg A$, а из выводимости $\neg\neg\neg A$ следует выводимость $\neg A$.

Формулируется ряд теорем, в том числе следующие теоремы, в которых для краткости опущены упоминания множества $\mathfrak{B}$.

Теорема 2 (4). Регулярное исчисление Π тогда и только тогда непополнимо (эффективно непополнимо), когда множества $K(\Pi)$ и $L(\Pi)$ неотделимы (эффективно неотделимы).

Теорема 3. Регулярное исчисление тогда и только тогда существенно неразрешимо, когда оно непротиворечиво и непополнимо.

Теорема 6 (8). Если множества $K(\Pi)$ и $L(\Pi)$ неотделимы (эффективно неотделимы), то исчисление Π непополнимо (эффективно непополнимо).

Теорема 3 есть усиление одного результата Тарского (Tarski A., J. Symbolic Logic, 1949, **14**, 75—76). На основе своих результатов автор доказывает известную теорему Гёделя — Россера (Gödel K., Monatsh. Math. und Phys., 1931, **38**, 173 — 198; Rosser J. B., J. Symbolic Logic, 1936, **1**, 87—100). Он показывает, что в теоремах 2 и 3 нельзя заменить условие регулярности более слабым требованием: для всякой выводимой формулы A, принадлежащей $\mathfrak{B}$, формула $\neg\neg A$ должна быть выводимой. В заключение формулируются 5 нерешенных проблем. *А. А. Марков*

2488. Исчисление предложений и реализуемость. Роз (Propositional calculus and realizability. Rose Gene F.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 1, 1—19 (англ.)

Автор исходит из понятия реализуемости, введенного Клином (Kleene S. C., J. Symbolic Logic, 1945, **10**, 109—124) и относящегося к арифметическим (number-theoretic) формулам, т. е. к формулам арифметического исчисления без переменных предложений и предикатов. Это понятие распространяется автором на формулы исчисления предложений. Формула исчисления предложений называется реализуемой, если реализуема всякая арифметическая формула, получающаяся из нее путем подстановок.

Отмечается, что каждая формула, доказуемая в исчислении предложений Гейтинга, реализуема. Соответствующая теорема для арифметических формул доказана Нелсоном (Nelson D., Trans. Amer. Math. Soc., 1947, **61**, 307 - 368). Устанавливается, что исчисление предложений Гейтинга не является полным в смысле реализуемости, для чего доказывается, что формула

$$P=((\neg\neg D\supset D)\supset\neg\neg D\vee\neg D)\supset\neg\neg D\vee\neg D,$$

где $D=\neg a_0\vee\neg a_1$ реализуема, но недоказуема в исчислении Гейтинга. Реализуемость формулы P доказывается при помощи классической логики. Для того чтобы обнаружить ее недоказуемость в исчислении Гейтинга, в первой части реферируемой работы обосновывается (в несколько измененном виде) матричный критерий доказуемости, предложенный Яськовским (Jaśkowski S., Recherches sur le système de la logique intuitioniste. Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VI, Paris, Hermann, 1936, 58—61).

Устанавливается, что часть исчисления предложений Гейтинга, не содержащая знака импликации, полна в смысле реализуемости. С этой целью доказываются следующие утверждения:

1) всякая формула, не содержащая знака импликации и недоказуемая в исчислении предложений Гейтинга, эквивалентна дизъюнкции формул, недоказуемых в классической логике предложений;

2) если $P=\sum_{i\leqslant m}P_i$ — дизъюнкция формул, недоказуемых в классической логике предложений, то существует такая подстановка, при которой формула P превращается в арифметическую формулу P^*, не являющуюся реализуемой;

кроме того, из доказательства упомянутой теоремы Нелсона для исчисления предложений получается

3) если P эквивалентна Q, а Q не является реализуемой, то P также нереализуема.

Из этих утверждений следует, что если P не содержит знака импликации и недоказуема в исчислении предложений Гейтинга, то она нереализуема.

В реферируемой работе доказывается также, что для класса реализуемых формул не существует регулярной характеристической матрицы, но строится последовательность матриц $\{L_n\}$ такая, что всякая реализуемая формула P тождественна (т. е. всегда принимает выделенное значение) в каждой матрице L_n.

Примечание референта. Утверждение автора о том, что доказательство теоремы Яськовского публикуется впервые, неверно: почти идентичное полное доказательство теоремы Яськовского опубликовано ранее референтом (Украинский мат. ж., 1952, **4**, № 2, 174—194). Кроме того, повидимому, автору неизвестны значительно менее громоздкие алгоритмы для решения проблемы разрешимости в исчислениях гейтинговского типа, предложенные референтом (Докл. АН СССР, 1950, **75**, № 6, 773—776) и Н. Н. Воробьевым (Докл. АН СССР, 1952, **85**, № 3, 465—468). *Б. Ю. Пильчак*

2489. Число структур конечных отношений. Дэйвис (The number of structures of finite relations. Davis R. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 3, 486—495 (англ.)

Рассматриваются полиадические отношения, заданные на конечном множестве, и находятся формулы для числа структур таких отношений. При этом m-адическое отношение A, заданное на множестве $N=\{1,\ldots,n\}$, изображается m-мерной матрицей $(a_{i_1\ldots i_m})$, в которой элемент $a_{i_1\ldots i_m}$ равен 1, если A выполняется для объектов $i_1,\ldots,i_m$, и равен 0 в противном случае. В частности, диадическое отношение iAj изображается квадратной матрицей (a_{ij}). Пусть π — подстановка степени n и пусть $t_{\pi^{-1}}(A)=t_{\pi^{-1}}(a_{i_1\ldots i_m})=(a_{\pi(i_1)}\ldots\pi(i_m))$. Два отношения A и B, заданные на N, называются

изоморфными тогда и только тогда, когда существует такая подстановка π степени n, что $t^{\pi}(A) = B$. Структура отношения A определяется через абстракцию как класс отношений, изоморфных с A (см. Carnap R., Abriss der Logistik, Wien, 1929).

Пользуясь известными теоретико-групповыми методами (см. Bourbaki N., Eléments de Math.: Algèbre, Paris, 1951, chap. I, Structures algébriques, 98—110; Murnaghan F. D., The theory of group representations, Baltimore, 1938, 9), автор получает формулу

$$st_m(n) = \sum_{[\pi]} n(\pi)\, f(t_\pi).$$

Здесь $st_m(n)$ — число структур m-адических отношений на множестве n элементов, суммирование производится по классам $[\pi]$ сопряженных подстановок; $f(t_\pi)$ — число отношений, инвариантных относительно перестановки класса $[\pi]$; $n(\pi) = (1/n!)\, c([\pi])$, где $c([\pi])$ — мощность класса $[\pi]$.

Числом степеней свободы $d_m(\pi)$ m-адических отношений, инвариантных относительно π, называется максимальное число независимых элементов в m-мерной матрице, инвариантной относительно π. Таким образом, $f(t_\pi) = 2^{d_m(\pi)}$.

Теорема 1. Если π имеет цикловую структуру $(p_1, \ldots, p_n)$, где p_i — число циклов длины i, то

$$d_m(\pi) = \sum_{r_1, \ldots, r_m = 1}^{n} (p_{r_1} \ldots p_{r_m})(r_1 \ldots r_m) / c, \text{ где}$$

c — общее наименьшее кратное всех r_k.

Теорема 2. $st_m(n) = \sum_{[\pi]} n(\pi)\, 2^{d_m(\pi)}$.

Полученные формулы позволяют вычислять $st_m(n)$.

Далее автор дает формулы для числа структур некоторых специальных диадических отношений: рефлексивных, симметрических, асимметрических и других. Как следствие он получает формулу для числа ориентированных графов с n узлами $P_1, \ldots, P_n$ и не более чем одной ветвью $P_i \to P_j$ и формулу для числа неориентированных графов с n узлами и не более чем одной ветвью между каждыми двумя узлами. Указывается на возможность решения различных комбинаторных задач путем сведения их к задаче о числе структур специальных диадических и полиадических отношений. С другой стороны, отмечается трудность общего решения этой последней задачи. В заключение приводится таблица числа структур диадических отношений $st_2(n)$ и чисел структур специальных диадических отношений при $n \leqslant 5$.

Г. Н. Поваров

2490. Проблема спектра в расширенном исчислении предикатов. Зыков А. А., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, 17, № 1, 63—76

Рассматриваются формулы расширенного исчисления предикатов (второй ступени) вида

$$< \{P\}, \{x\} > \mathfrak{A}(\{P\}, \{Q\}; \{x\}, \{y\}),$$

где $\{P\}$ означает совокупность связанных переменных предикатов, $\{Q\}$ — совокупность свободных предикатов, $\{x\}$ — совокупность связанных предметных переменных, $\{y\}$ — совокупность свободных предметных переменных, а $< \{P\}, \{x\} >$ означает приставку, в которой кванторы общности и существования, связывающие оба вида переменных, расположены в произвольном порядке. Формулы такого вида, не содержащие свободных переменных, называются количественными.

Пусть A и B — две формулы, Π — совокупность всех их свободных переменных (пустая, если A и B — обе количественные). A и B называются равнозначными, если, какова бы ни была предметная область и какие бы индивидуальные предметы и предикаты этой области ни были подставлены вместо переменных из Π, обе формулы обращаются либо одновременно в истинные, либо одновременно в ложные высказывания; в частности, если A и B количественные, то, каково бы ни было конкретное кардинальное число τ, обе формулы одновременно либо истинны, либо ложны на всякой предметной области мощности τ.

Теорема I. Для любой формулы можно построить равнозначную ей, с теми же свободными переменными, но такую, чтобы в ее приставке кванторы по предикатам стояли впереди кванторов по предметам.

Пусть формула имеет вид, как в теореме I. Каждая последовательность кванторов приставки, содержащая все рядом стоящие кванторы одного вида (т. е. только общности или только существования), называется ступенью приставки.

Теорема II. Для формулы, предикатная часть приставки которой имеет l ступеней ($l \geqslant 1$), можно построить равнозначную ей формулу с теми же свободными переменными и с тем же числом l ступеней, но такую, чтобы каждая ступень состояла только из одного квантора.

Кроме преобразований в смысле равнозначности, рассматривается одно преобразование количественных формул, которое хотя и меняет мощности областей, выполняющих формулу, но меняет их обозримым образом.

Теорема III. Для всякой формулы A вида

$$< \{S\} > < \{x\} > \mathfrak{A}(\{S\}; \{x\})$$

можно построить формулу B вида

$$E\psi\, (Q) < \{y\} > \mathfrak{B}(\psi, Q; \{y\}),$$

где ψ — двуместный, Q — одноместный предикаты, причем если A истинна на некоторой области мощности τ, то B истинна на области мощности $\mu = \tau + \tau^l + 2^{\tau^l}$ (где l — число мест самого многоместного предиката из A), и обратно, если B истинна на некоторой области мощности μ, то число μ имеет вид $\tau + \tau^l + 2^{\tau^l}$ (где τ — другое кардинальное число, меньшее μ) и A истинна в областях мощности τ. В частности, когда τ и μ бесконечны, равенство $\mu = \tau + \tau^l + 2^{\tau^l}$ переходит в $\mu = 2^{\tau}$.

Проблема спектра состоит в выработке понятия спектра, полностью характеризующего содержательный смысл количественных формул и в то же время не приводящего к антиномиям (как получается при наивном определении: «спектр — совокупность всех кардинальных чисел ...»). Из теоремы III следует, что при выработке разумного понятия спектра количественной формулы достаточно рассматривать лишь формулы такого вида, какой имеет формула B в этой теореме. *А. С. Есенин-Вольпин*

2491. Внутренние модели для теории множеств. III. Шепердсон (Inner models for set

theory. Part III. Shepherdson J. C.), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 2, 145—167 (англ.)

Статья является последней частью работы (см. J. Symbolic Logic, 1951, 16, № 3, 161—190; 1952, 17, № 4, 225—237).

Рассматривается система аксиом A, B, C из системы Σ (см. Гёдель К., перевод А. А. Маркова, Усп. мат. наук, 1948, 3, № 1 (23), 96—149). Автор придерживается обозначений, принятых в только что упомянутой работе. В первой части отмечается, что построенная Гёделем модель Δ (в которой имеет место аксиома выбора и $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ для любого порядкового числа α) может быть построена и без помощи аксиомы D системы Σ, если исходить из определения понятия «ординал», основанного на теореме 6.7 цитированной работы Гёделя; при этом модель Δ все равно удовлетворяет аксиоме D. Автор вводит общее понятие модели: первоначальные понятия модели должны быть определены посредством

$$\mathfrak{Cls}_m(A) \equiv \mathfrak{A}(A),\quad \mathfrak{M}_m(A) \equiv \mathfrak{B}(A),\quad A \in_m B \equiv \mathfrak{C}(A, B),$$

где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — пропозициональные функции исходной системы A, B, C. Каждому предложению φ исходной системы соответствует полученное посредством «релятивизации» предложение φ_m модели (ср. Гёдель, стр. 130); 'Mod ($\mathfrak{Cls}_m$, $\mathfrak{M}_m \in_m$)' есть сокращение для конъюнкции релятивизированных аксиом системы A, B, C. Две модели называются изоморфными, если существует пропозициональная функция, устанавливающая одно-однозначное соответствие между классами этих моделей, сохраняющее первоначальные отношения этих моделей.

Автор ограничивается рассмотрением моделей, удовлетворяющих условиям:

1.31. $(A_m)(\exists B)(X)[X \in_m A_m .\equiv. X \in B]$,

(B, определенное этим условием, обозначается $|A_m|$; таким образом, в силу определения 1.311 $(X)[X \in |A| .\equiv. X \in_m A]$).

1.32. $(\exists E^*)[\mathrm{Rel}(E^*).(x)(y)(\langle xy\rangle \in E^* .\equiv: .\equiv: \mathfrak{M}_m(y).x \in_m y)]$;

1.33. $(X)[\mathfrak{M}_m(X) .\supset. \mathfrak{M}(|X|)]$.

Наиболее важные результаты относятся к моделям, удовлетворяющим условию

1.51. $(A)[\sim \mathfrak{Cm}(A) .\supset. (\exists y)(y \in A. .(z) \sim (z \in_m y. z \in A))]$.

Полными моделями автор называет модели, удовлетворяющие аксиомам A, B, C и двум условиям

1.41. $(X)(Y)[X \in_m Y .\equiv: \mathfrak{M}_m(X).\mathfrak{Cls}_m(Y).X \in Y]$

1.42. $(A_m)(X)[X \in A_m .\supset. \mathfrak{M}_m(X)]$.

Полные модели удовлетворяют условиям 1.31, 1.32 и 1.33.

Один из основных результатов первой части — теорема об отображении:

1.5. Всякая модель $\mathfrak{M}$ для аксиом A, B, C, удовлетворяющая условиям 1.31, 1.32, 1.33 и 1.51, изоморфна полной модели.

Отмечается, что если ограничиться рассмотрением таких изоморфизмов между моделями, что отображение множеств осуществляется некоторым классом, то при соблюдении аксиомы D в исходной системе условия 1.31, 1.32, 1.33 и 1.51 оказываются необходимыми и достаточными.

По аналогии с Гёделем (см. цитированную выше работу), автор вводит металогическое понятие абсолютности и доказывает для полных моделей абсолютность тех концепций, абсолютность которых для модели Δ доказана в гл. VII работы Гёделя, причем для абсолютности понятия ординала приходится требовать выполнения либо аксиомы D в исходной системе, либо условия 1.51 для полной модели, либо условия (c): $(U)[U \subseteq V_m .\supset. \mathfrak{Cls}_m(U)]$.

Модели, удовлетворяющие условию (c), автор называет сверхполными (super-complete). Для сверхполных моделей устанавливается абсолютность кардинальных чисел, а также понятий недостижимого числа в узком смысле

$$(x \in \mathrm{In}_2 .\equiv: \mathfrak{Reg}(x).(\alpha)[\omega_\alpha < x .\supset. 2^{\omega_\alpha} < x].x > \omega)$$

и в широком смысле

$$(x \in \mathrm{In}_1 .\equiv: \mathfrak{Reg}(x).(\exists \alpha)[\alpha \in K_{\mathrm{II}} . x = \omega_\alpha]).$$

Здесь

$$\mathfrak{Reg}(X) .\equiv: X \in \mathrm{On}.(y)[y \subseteq X. y < X :\supset. \mathfrak{Lim}(y) < X].$$

Во второй части автор рассматривает сверхполные модели. Важнейшие результаты:

Если в системе Σ + E класс On_m сверхполной модели $\in \mathrm{On}$, то $\mathrm{On}_m \in \mathrm{In}_2$, и обратно (даже при нарушении D в исходной системе), всякое $\rho \in \mathrm{In}_2$ порождает некоторую сверхполную модель. Если исходная система удовлетворяет A, B, C и 'V = L', то любая сверхполная модель для A, B, C удовлетворяет 'V = L'. (Из V = L вытекает аксиома выбора и $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ для любого порядкового числа α, см. цитированную работу Гёделя).

Если система A, B, C непротиворечива, то Σ + E + '$\mathrm{In}_1 = 0$' непротиворечива.

В третьей части автор вводит понятие собственной полной модели:

4.21. $\mathrm{PCM}(c, s) .\equiv. \psi(c, s)$,

где '$\psi(c, s)$' есть пропозициональная функция от c и s, выражающая, что модель, определенная формулами

4.20. $\mathfrak{Cls}_m(X) .\equiv. X \in c$; $\mathfrak{M}_m(X) .\equiv. X \in s$;

$$X \in_m Y .\equiv: X \in s. Y \in c. X \in Y,$$

удовлетворяет релятивизированным аксиомам A_m, B_m, C_m, условиям 1.41, 1.42 и

4.10. $(\exists C)(X)[\mathfrak{Cls}_m(X) .\equiv. X \in C]$.

'PCM (c, s)' является нормальной пропозициональной функцией. Через G автор обозначает аксиому '$\sim(\exists c, s)\,\mathrm{PCM}(c, s)$', выражающую отсутствие собственных полных моделей. Доказывается:

3.72. Если система A, B, C непротиворечива, то и система A, B, C, D, 'V = L', G, '$\mathrm{In}_1 = 0$' непротиворечива.

4.41. Выполнение аксиомы G влечет несуществование модели для A, B, C, определенной тремя множествами c, s, e посредством $\mathfrak{Cls}_m(X) .\equiv. .\equiv. X \in c, \mathfrak{M}_m(X) .\equiv. X \in s, X \in_m Y .\equiv. \langle XY\rangle \in e$ и удовлетворяющей условиям 1.31, 1.32, 1.33, 1.51. (Это доказывается при помощи 1.5.)

Для того чтобы аксиома G влекла несуществование полных моделей, для которых $\mathfrak{M}(V_m)$, автору приходится потребовать ω-непротиворечивость системы A, B, C; он отмечает, что полученные Гёде-

лем (см. цитированную выше работу), а также в предыдущих частях реферируемой работы, результаты об относительной непротиворечивости сохраняют силу и для ω-непротиворечивости (4.42).

Теорема 4.44 гласит:

Если система A, B, C ω-непротиворечива, то не существует пропозициональных функций $\mathfrak{Cls}_m(X)$, $\mathfrak{M}_m(X)$, $X \in_m Y$, таких, что из A, B, C можно вывести, что определенная этими функциями модель есть полная модель для аксиом A, B, C, для которой '$V_m \neq V$'.

Автор показывает, что доказательство теоремы Сколема — Лёвенгейма о существовании счетной модели для всякой выполнимой системы формализуется в A, B, C, E (4.52), причем из существования собственной полной модели вытекает существование счетной собственной полной модели (4.53). Далее:

4.63. Если K — формула, не содержащая свободных переменных и символа '$\mathfrak{Cls}$', в которой все кванторы стоят спереди и нет кванторов существования, связывающих классовую переменную, и если K выводима из A, B, C, D, '$V = L$' и G, то совместимость '$\sim$ K' с A, B, C не может быть доказана путем построения полной модели, определенной нормальными пропозициональными функциями (в случае ω-непротиворечивости A, B, C от последнего ограничения можно освободиться).

4.66. Если в условиях теоремы 4.63 K не содержит классовых переменных и если может быть построена полная модель, определенная нормальными пропозициональными функциями, причем из A, B, C, D, '$V = L$', G вытекает, что эта модель удовлетворяет системе A, B, C и K, то K выводима из A, B, C, D, '$V = L$', G.

В заключение автор рассматривает стандартные модели в смысле Россера и Хао Вана (Rosser, Hao Wang, J. Symbolic Logic, 1950, 15, 113—129); это модели, определенные множествами c, s, e, как в 4.41 (с заменой '$\langle XY\rangle \in e$' на '$:\langle XY\rangle \in e.X \in s.Y \in c$'), такие, что класс $|\mathrm{On}_m|$ вполне упорядочен относительно $\leqslant_m$. В предположении, что $|\mathrm{On}_m|$ изоморфен некоторому ординалу относительно $\leqslant_m$ и $\leqslant$, автор отмечает, что при наличии аксиом A, B, C, D в исходной системе каждая стандартная в этом усиленном смысле модель для A, B, C, D изоморфна собственной полной модели. Автор показывает, что при отождествлении понятий стандартной и собственной полной модели результат Россера — Хао Вана о том, что если A, B, C ω-непротиворечива, то формула $\mathrm{Con} \supset \sim G$ (где 'Con' выражает непротиворечивость A, B, C, а '$\sim$ G' — наличие стандартной модели) не выводима в системе A, B, C, может быть получен методами реферируемой работы.

Заметим, что большинство результатов автора переносится и на системы аксиом теории множеств, содержащие индивидуумы (не являющиеся классами), в предположении, что класс всех индивидуумов-неклассов может быть вполне упорядочен.

А. С. Есенин-Вольпин

2492. Две заметки о рекурсивно перечислимых множествах. Деккер (Two notes on recursively enumerable sets. Dekker J. C. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 3, 495—501 (англ.)

Автор следующим образом развивает терминологию, установленную в работе Поста (Post E. L., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, № 5, 284—316): множество называется иммунным (immune), если оно бесконечно и не содержит никакого бесконечного рекурсивно перечислимого (р. п. м.) множества. Р. п. м. называется простым (simple), если его дополнение иммунно. $g_n(x)$ — частично рекурсивная функция двух переменных, порождающая при различных n всевозможные частично рекурсивные функции одного аргумента; множество значений $g_n(x)$ при фиксированном n обозначается ω_n. Множество α называется производящим (productive), если существует частично рекурсивная функция $p(n)$ такая, что при $\omega_n \subseteq \alpha$ $p(n)$ определено и $p(n) \in \alpha - \omega_n$; функция $p(n)$ называется производящей для α. Множество α называется производящим в смысле Поста (P-производящим), если хоть одна из его производящих функций рекурсивна. Р. п. м. называется творческим (creative) или P-творческим, если его дополнение — производящее или, соответственно, P-производящее множество.

В первой заметке доказываются некоторые простые теоремы, например: пересечение двух простых множеств просто; сумма двух простых множеств проста или имеет конечное дополнение; существуют два простых множества, дающих в сумме натуральный ряд; аналогично для сверхпростых множеств.

Во второй заметке автор вводит понятие мезоического множества: множество называется медиальным (medial), если оно не р. п. м., и при этом не является ни иммунным, ни производящим; р. п. м. называется мезоическим (mesoic), если его дополнение медиально.

Степень неразрешимости проблемы разрешимости множества α относительно много-однозначной (одно-однозначной) сводимости обозначается $\Delta(\alpha)$ (соответственно $d(\alpha)$); $\Delta(\alpha) \leqslant \Delta(\beta)$ означает, что проблема разрешимости для α много-однозначно сводима к проблеме разрешимости для β; $\Delta(\alpha) < \Delta(\beta)$ означает, что $\Delta(\alpha) \leqslant \Delta(\beta)$, но $\Delta(\beta) \leqslant \Delta(\alpha)$ неверно; аналогично для $d(\alpha)$ (см. Пост, предыдущая ссылка). Автор доказывает, что существует мезоическое множество ν, для которого $d(\zeta) < d(\nu) < d(k)$ и $\Delta(\zeta) = \Delta(\nu) < \Delta(k)$, где ζ и k суть простое и полное множества, определенные на стр. 298 и 295 цитированной работы Поста, а именно, ν есть множество значений функции $2 \cdot z(n)$, где $z(n)$ есть 1—1 рекурсивная функция, значения которой пробегают ζ.

А. С. Есенин-Вольпин

2493. Соображения по поводу нулевого класса. Осборн (A consideration of the null class. Osborn Roger), Math. Mag., 1953, 26, № 4, 175—178 (англ.)

Рассматриваются различные определения нулевого класса; отмечается необходимость введения этого понятия в логику и дается обзор различных употреблений слова «нуль» в математике. Новых результатов или идей статья не содержит.

Д. П. Горский

2494. Замечание к работе Лукасевича «Об интуиционистской теории дедукции». Коэн (A remark on Łukasiewicz's «On the intuitionistic theory of deduction». Cohen Kalman Joseph), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, A56, № 2, 111—112; Indagationes math., 1953, 15, № 2, 111—112 (англ.)

Лукасевич ввел (Łukasiewicz J., Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1952, A55, № 3,

202—212) в конструктивное («интуиционистское») исчисление высказываний с логическими операторами F (импликации), T (конъюнкции) и O (дизъюнкции) аналоги C, K, A соответствующих классических операторов, определяя Cpq как $NTpNq$, Kpq как $NCpNq$ и Apq как $CNpq$; здесь N — оператор отрицания. Он доказал, что если заменить повсюду в конструктивно выводимой формуле конструктивный оператор соответствующим классическим, то получается конструктивно выводимая формула.

Автор реферируемой заметки конкретным примером показывает, что замена некоторых, но не всех вхождений конструктивного оператора соответствующим классическим оператором может привести от конструктивно выводимой формулы к формуле, конструктивно невыводимой. *В. К. Детлавс*

2495. По поводу замечания Коэна. Лукасевич (Comment on K. J. Cohen's remark. Łukasiewicz Jan), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 2, 113; Indagationes math., 1953, **15**, № 2, 113 (англ.)

Автор возражает на замечание Коэна (см. реф. 2494) и указывает, что в своей работе он имел в виду именно замену всех вхождений конструктивного оператора соответствующим классическим оператором и что в этой работе по существу содержится более простой пример, чем в замечании Коэна. *А. С. Есенин-Вольпин*

2496. Логика и математика. Дьёдонне (Logic and mathematics. Dieudonné Jean), Revista Mat. Elem., 1953, **2**, 1—7 (исп.)

Лекция, состоявшаяся в университете Лос Андес в октябре 1952 г.

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 715.

2497 К. Введение в логику. Копи (An introduction to logic. Copi Irving M., pp. 472, The Macmillan Co., New York, 1953, 4 doll.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7 (библ.)

См. также: 2470, 2477, 2551 **РЕЦ.** 2805 **К**

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

2498. Из аддитивной теории простых чисел. Рихерт (Aus der additiven Primzahltheorie. Richert Hans-Egon), J. reine und angew. Math., 1953, **191**, № 3—4, 179—198 (нем.)

Применяются методы Виноградова к некоторым задачам аддитивной теории простых чисел. Изучается вопрос о числе решений $\lambda_n^{(s)}(m)$ уравнения

$$m = a_1 p_1 + \cdots + a_s p_s \qquad (1)$$

при условии, что $3 \leqslant p_i \leqslant n$, p_i — простые числа, $s \geqslant 3$, a_i — заданные целые числа $\neq 0$, $(a_i, a_k) = 1$ для $i \neq k$.

Доказывается асимптотическая формула, выражающая $\lambda_n^{(s)}(m)$ через число решений уравнения вида (1), где p_i — любые целые числа $\geqslant 1$ и $\leqslant n$. В частности, если все $a_i > 0$ и $n = m \equiv \sum_{i=1}^{s} a_i \pmod 2$, то все достаточно большие n представимы в форме (1), и имеет место асимптотическая формула для числа представлений, аналогичная формуле Виноградова. Если же не все a_i имеют один знак и $m \equiv \sum_{i=1}^{s} a_i \pmod 2$, то доказывается, что уравнение (1) имеет бесконечно много решений в простых числах.

Изучается также число решений $G_n(m)$ уравнения $m = p_1 + p_2$, $3 \leqslant p_i \leqslant n$, p_i — простые; при $n = \infty$ полагается $G_n(m) = G(m)$. Доказываются две теоремы о средних значениях $G_n(m)$, согласующиеся с известной гипотезой Харди и Литлвуда:

$$G(n) = G_n(n).$$

А. А. Киселев

2499. Улучшение оценки остаточного члена в формуле для числа делителей. Рихерт (Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem. Richert Hans-Egon), Math. Z., 1953, **58**, № 2, 204—218 (нем.)

Доказывается оценка:

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \log x + (2C - 1)x + O(x^{15/46} \log^{30/23} x).$$

В работе применен метод Титчмарша для оценки тригонометрических сумм с двумя переменными, сводящийся, в свою очередь, к оценке снизу определителя Хессе.

Этот метод был ранее использован для оценок величины $\zeta(1/2 + it)$ и числа целых точек в круге. *Н. Г. Чудаков*

2500. О числе абелевых групп заданного порядка. II. Рихерт (Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. II. Richert Hans-Egon), Math. Z., 1953, **58**, № 1, 71—84 (нем.)

Доказывается, что

$$A_0(x; q, l) = c_1(q)\, x + c_2(q)\, x^{1/2} + c_3(q)\, x^{1/3} + O(x^{5/16} q^{5/8} \log^{5/16} x), \qquad (1)$$

где $A_0(x; q, l) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l \pmod q}} a_0(n)$ при $(l, q) = 1$,

$a_0(n)$ — число абелевых групп порядка n. Этот результат сильнее, чем имевшийся ранее (Шапиро-Пятецкий И. И., Мат. сб., 1950, **26** (68), 479—486).

В доказательстве почти не используются аналитические свойства ζ-функции, в отличие от других работ по этому вопросу.

Решающую роль играет оценка суммы

$$R(x, \eta, \alpha; q, j; \omega) = \sum_{\substack{n \leqslant \eta \\ n \equiv j \pmod q}} \psi\left(\frac{x}{n^\alpha} + \omega\right), \qquad (2)$$

где $\psi(t) = t - [t] - 1/2$. Эта оценка производится при помощи тригонометрических сумм. Автор указывает,

что оценка (2) может быть полезна и для других вопросов теории чисел. *И. И. Шапиро-Пятецкий*

2501. Коэффициенты некоторых бесконечных произведений. Ньюман (The coefficients of certain infinite products. Newman Morris), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 3, 435—439 (англ.)

Изучаются функции $p_r(n)$, определяемые тождествами

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^r=\sum_{n=0}^{\infty}p_r(n)\,x^n.$$

При помощи известных выражений Эйлера и Якоби для $p_1(n)$ и $p_3(n)$ элементарно доказывается ряд формул для $p_2(n)$, $p_4(n)$, $p_6(n)$. Например,

$$p_6(n)=-\sum_{\substack{u^2+v^2=8n+2\\ u>0,\ v>0}}(-1)^{\frac{u+v}{2}}uv. \qquad (1)$$

Из соотношений между модулярными функциями, полученных автором ранее (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 73, 313—320), выводятся «главные» тождества:

1) пусть r — четное число, $0<r\leqslant 24$, p — простое число и $r(p-1)/24=\delta$ — целое число, тогда

$$p_r(np+\delta)=p_r(\delta)\,p_r(n)-p^{r/2-1}\,p_r\left(\frac{n-\delta}{p}\right); \qquad (2)$$

2) пусть $r=2.\ 4,\ 6$, p — простое число, $r(p+1)\equiv 0\pmod{24}$, $\Delta=r(p^2-1)/24$, тогда

$$p_r(np+\Delta)=(-p)^{r/2-1}\,p_r\left(\frac{n}{p}\right). \qquad (3)$$

В формулах (2) и (3) надо полагать $p_r(x)=0$, если $x\neq$ натуральному числу. Из этих формул с использованием формул типа (1) выводится ряд следствий. Например,

$$p_2\{(p^t-1)/12\}=(\pm 1)^t(t+1)$$

для $p\equiv 1\pmod{12}$.

Приводится таблица функций $p_r(n)$ для $r=2,\ 4,\ 6$ и $1\leqslant n\leqslant 25$. *А. А. Киселев*

2502. О монотонных мультипликативных функциях. Мозер, Ламбек (On monotone multiplicative functions. Moser L., Lambek J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 544—545 (англ.)

Пусть функция $f(n)$ мультипликативна (т. е. $f(mn)=f(m)f(n)$ при $(m,\ n)=1$) и не убывает при возрастании n; доказывается, что в этом случае $f(n)=n^k$, где k — положительная постоянная. Метод доказательства элементарен. Теорема имеет интерес с точки зрения общей теории характеров числовых полугрупп. *Н. Г. Чудаков*

2503. О количестве простых делителей числа n. Деланж (Sur le nombre des diviseurs premiers de n. Delange Hubert), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 11, 542—544 (франц.)

Пусть $\omega(n)$ — число различных простых делителей целого положительного n; $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$; $N(x,\ a,\ b)$ — число тех n, $3\leqslant n\leqslant x$, для которых

$$a\leqslant\frac{\omega(n)-\log\log n}{\sqrt{\log\log n}}\leqslant b.$$

Доказывается теорема:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}N(x,a,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}\,dt. \qquad (1)$$

Доказательство основано на методе моментов. Исходя из оценки суммы

$$\sum_{3\leqslant n\leqslant x}(\omega(n)-\log\log n)^q\quad(q=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

доказывается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^q\,d\left(\frac{1}{x}N(x,-\infty,t)\right)\to$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^q\,e^{-t^2/2}\,dt\quad\text{при } x\to\infty,$$

откуда (1) следует в силу теоремы Карлемана о единственности решения проблемы моментов Гамбургера (Carleman T., Les fonctions quasi analytiques, Gauthier-Villars, Paris, 1926, 80—81).

Заметим, что (1) является частным случаем одной теоремы Эрдёша и Каца (Erdös P., Kac M., Amer. J. Math., 1940, 62, 738—742), а также Левека (LeVeque W. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 66, 440—463), который получил (1) с нетривиальной оценкой добавочного члена, о чем автор не упоминает. *И. П. Кубилюс*

2504. Разбиение арифметического интервала. Гастин (Partitioning an arithmetic interval. Gustin William), Canad. J. Math., 1953, 5, № 1, 81—85 (англ.)

Рассматриваются множества неотрицательных целых чисел, содержащие нуль. По определению множество X называется разложенным в конечную или бесконечную арифметическую сумму множеств X^μ, если каждое $x\in X$ единственным образом представимо в виде $x=\Sigma x^\mu$, где $x^\mu\in X^\mu$, и если, наоборот, каждая сумма Σx^μ принадлежит X. Через kX обозначается множество вида kx, где $x\in X$.

Пусть порядковое число $d>1$ или равно ω. Арифметическим интервалом $I(d)$ называется множество неотрицательных целых чисел, меньших d. Доказываются теоремы:

1. Пусть $d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots$ — конечная или бесконечная последовательность порядковых чисел такая, что $d_1d_2d_3\ldots\leqslant\omega$, тогда

$$I(d_1d_2d_3\ldots)=I(d_1)+d_1I(d_2)+d_1d_2I(d_3)+\ldots$$

2. Пусть $I=\Sigma X^\mu$ — разбиение арифметического интервала в арифметическую сумму множеств. Тогда существует единственная последовательность порядковых чисел $d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots$ такая, что

$$I=I(d_1d_2d_3\ldots)=I(d_1)+d_1I(d_2)+d_1d_2I(d_3)+\ldots, \qquad (1)$$

и данное разбиение ΣX^μ получается путем объединения слагаемых в правой части (1), причем соседние слагаемые входят в разные X^μ.

А. А. Киселев

2505. Заметка о проблеме Шольца — Брауэра в теории аддитивных цепей. Уц (A note on the

Scholz — Brauer problem in addition chains. Utz W. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 3, 462—463 (англ.)

Аддитивной цепью для натурального числа n называется последовательность натуральных чисел $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r = n$ такая, что при любом $i > 0$ $a_i = a_j + a_k$ для некоторых j, $k < i$ ($j = k$ допускается). Через $l(n)$ обозначается наименьшее r, при котором существует аддитивная цепь для n. Шольц (Scholz A., Jber. Deutschen Math. Verein., 1937, 47, 41) и Брауэр (Brauer A. T., Bull. Amer. Math. Soc., 1939, 45, 736—739) поставили и решили ряд задач, относящихся к теории этих цепей. Автор занимается гипотезой Шольца, которая заключается в том, что

$$l(2^q - 1) \leqslant q + l(q) - 1,$$

и доказывает ее для $q = 2^s(2^n + 1)$.

Ставится несколько новых задач. *А. А. Киселев*

2506. О неопределенных квадратичных формах с пятью переменными. Уотсон (On indefinite quadratic forms in five variables. Watson G. L.), Proc. London Math. Soc., 1953, сер. 3, 3, № 10, 170—181 (англ.)

Автор доказывает, что неопределенная квадратичная форма $Q(x_1, \ldots, x_5) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_4 x_5$ с вещественными коэффициентами, отношения которых не все рациональны, и с отличным от нуля дискриминантом принимает, при некоторых системах целых значений переменных x_1, x_2, ..., x_5, сколь угодно малые по модулю, но отличные от нуля значения.

Для доказательства этой теоремы автор сначала приводит форму линейным преобразованием к такому виду, что $\lambda_4 > 0$, $\lambda_5 > 0$, $\lambda_6 > 0$, $\min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) < 0$, λ_1/λ_4 иррационально.

Растущему параметру P автор придает дискретный ряд значений: $P = q_0^2$, где q_0 пробегает значения знаменателей дробей a_0/q_0, являющихся подходящими дробями при разложении λ_1/λ_4 в бесконечную непрерывную дробь. Тогда оказывается, что при достаточно больших значениях P число решений системы неравенств $|Q(x_1, \ldots, x_5)| < 1$; $1 \leqslant x_r \leqslant P$ ($r = 1, 2, \ldots, 5$) превосходит γP^3, где γ не зависит от P. Отсюда сформулированная выше теорема следует непосредственно.

Эта теорема представляет собой обобщение результата, установленного ранее Давенпортом и Хейлбронном (Davenport, Heilbronn, J. London Math. Soc., 1946, 21, 185—193) для случая аддитивных форм $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_5 x_5^2$, на охарактеризованный выше частный вид неаддитивных и арифметически не аддитивизируемых квадратичных форм с пятью переменными.

Опечатка: на стр. 172, строка 13 сверху, в формулировке леммы 1 в условии (IV) вместо $\alpha = O(P^{\delta})$ должно быть $\alpha = O(P^{-\delta})$.

В. А. Тартаковский

2507. О линейной независимости алгебраических чисел. Морделл (On the linear independence of algebraic numbers. Mordell L. J.), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 3, 625—630 (англ.)

Предполагается, что: 1) $x_1^{n_1} = a_1, \ldots, x_s^{n_s} = a_s$ — уравнения в поле K, для которых из $x_1^{\nu_1} \ldots x_s^{\nu_s} \in K$ следует $\nu_1 \equiv 0 \pmod{n_1}$, ..., $\nu_s \equiv 0 \pmod{n_s}$, 2) K или содержит числа $e^{2\pi i/n_1}, \ldots, e^{2\pi i/n_s}$, или K и числа $x_1, \ldots, x_s$ — вещественные; 3) существует зависимость $P(x_1, \ldots, x_s) = 0$, где P — многочлен в поле K с показателем степени $x_1, \ldots, x_s$ соответственно $< n_1, \ldots, n_s$. Доказывается, что все коэффициенты P обращаются в нуль. *Э. К. Фогелс*

2508. Собственно примитивный тернарный неопределенный квадратичный род, содержащий более чем один класс. Джонс, Хадлок (Properly primitive ternary indefinite quadratic genera of more than one class. Jones Burton W., Hadlock E. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 539—543 (англ.)

Ставится задача построения родов неопределенных тернарных квадратичных форм $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ryz + 2sxz + 2txy$, содержащих более одного класса.

Доказывается теорема: если Ω' — нечетный квадрат, Δ' — отрицательный нечетный квадрат, Ω'' и Δ'' — нечетные степени 2, причем $\Omega''\Delta'' \geqslant 64$, то существует род неопределенных тернарных квадратичных форм инвариантов $[\Omega, \Delta]$, где $\Omega = \Omega\,\Omega''$, $\Delta = \Delta'\Delta''$, содержащий не менее двух классов.

Построение проводится следующим образом: пусть $p_1 \equiv 1 \pmod 8$, $p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $q \equiv \pm 1 \pmod 8$ суть различные простые числа, не входящие в $\Omega \cdot \Delta$. Образуем формы $f_1 = (a_1, b_1, c_1, r_1, s_1, t_1)$ и $f_2 = (a_2, b_2, c_2, r_2, s_2, t_2)$, полагая $a_1 = p_1^2$, $a_2 = p_2^2$, $b_1 = b_2 = -\Omega q^2$, $t_1 = t_2 = 0$ и подбирая c_1, s_1, r_1; c_2, s_2, r_2 так, чтобы f_1 и f_2 были собственно примитивными квадратичными формами инвариантов $[\Omega, \Delta]$ с характерами а) 1 — по всем простым $r_{\Omega} \nmid \Omega'$ и по 4 и 8 (если последние существуют) и б) $(F_1/q_{\Delta}) = (F_2/q_{\Delta}) = (-1/q_{\Delta})$ — по всем простым $q_{\Delta} \nmid \Delta'$.

Показывается, что это можно сделать и что f_1 и f_2 неэквивалентны. *А. В. Малышев*

2509. Предельная двенадцатиричная форма. Коксетер, Тодд (An extreme duodenary form. Coxeter H. S. M., Todd J. A.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 3, 384—392 (англ.)

Положительная квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется предельной (Korkine A., Zolotareff G., Math. Ann., 1873, 6, 366—389), если

$$\mu(f) = \frac{\min f}{\sqrt[n]{\det f}}$$

является локальным максимумом при всех бесконечно малых вариациях коэффициентов формы f; здесь $\min f$ — арифметический минимум формы, т. е. наименьшее ненулевое значение f, принимаемое ею в целых точках, $\det f$ — определитель формы f.

Предлагается следующая двенадцатиричная предельная форма

$$K_{12} = \frac{1}{12}\left\{\sum_{j=1}^{5}(6x_j + 3y_j + 2y_6)^2 + \right.$$

$$+3\left(6x_6+2\sum_{j=1}^{5}y_j-y_6\right)^2+3\sum_{j=1}^{5}y_j^2+y_6^2\Big\},$$

для которой $\mu(K_{12})$ является наибольшим среди всех известных двенадцатиричных предельных форм.

Вычислено, что

$$(2/\mu(K_{12}))^{12}=(2/\min K_{12})^{12}\det K_{12}=\frac{729}{4096};$$

число представлений минимума равно 756, так что имеется такое решетчатое заполнение 12-мерного пространства равными непересекающимися сферами, что каждая из них касается 756 других. Форма K_{12} является обобщением формы E_6 (Coxeter H. S. M., Canad. J. Math., 1951, 3, 391—441).

Для доказательства предельности K_{12} применяется критерий Вороного (Voronoï G., J. reine und angew. Math., 1907, 133, 97—178), при этом интерпретация K_{12} как решетки в унитарном 6-мерном пространстве позволяет несколько упростить выкладки.

А. В. Малышев

2510. Наибольший простой делитель формы ax^m+by^n. Малер (On the greatest prime factor of ax^m+by^n. Mahler K.), Nieuw. arch. wiskunde, 1953, 1, № 2, 113—122 (англ.)

Пусть $F(x, y)=ax^m+by^n$, где m, n — натуральные числа, причем $m\geqslant 2$, $n\geqslant 3$, a, b — целые рациональные числа. Пусть (x, y) пробегает бесконечное множество таких целых точек плоскости, для которых общий наибольший делитель x и y остается ограниченным.

Доказывается, что наибольший простой делитель $F(x, y)$ неограниченно возрастает. Доказательство базируется на теореме Зигеля о целых точках, лежащих на алгебраических кривых (Siegel C. L., Abhandl. preuss. Akad. Wiss., 1929, № 1, 1—70), и на теореме Парри о бинарных формах (Parry C. J., Acta math., 1950, 83, 1—100).

Следствие: пусть (x, y) пробегает такие целые точки, что ax^m+by^n имеет ограниченные простые делители; тогда будут ограниченными и величины δ', $x^m\delta^{-1}$, $y^n\delta^{-1}$ и $(ax^m+by^n)\delta^{-1}$, где δ — общий наибольший делитель x^m и y^n, δ' — наибольший простой делитель δ.

Н. Г. Чудаков

2511. Об одном классе диофантовых уравнений второй степени в мнимых квадратичных полях. Фьельстедт (On a class of Diophantine equations of the second degree in imaginary quadratic fields. Fjellstedt Lars), Arkiv mat., 1953, 2, № 5, 435—461 (англ.)

Аналогично классической теории решения в целых рациональных числах неопределенного уравнения $x^2-Dy^2=1$ строится теория решения этого уравнения в целых числах мнимого квадратичного поля $k(\sqrt{-m})$. Коэффициент D также считается числом этого поля.

Однако, ввиду отсутствия почти во всех полях $k(\sqrt{-m})$ алгоритма Евклида, не может быть использован аппарат непрерывных дробей. Поэтому теория строится по типу тех исследований уравнения $x^2-Dy^2=1$, которые обходятся без непрерывных дробей.

Кроме § 4, все теоремы работы по результатам и методу имеют аналоги в классическом случае. В § 4 разбирается случай рационального D с применением полученных результатов к вопросу о единицах некоторых алгебраических полей.

Примечание референта. Однако эти выводы содержат ошибки. Так, теорема 9 утверждает, что в поле $k(\sqrt{D}, \sqrt{-1})$ основная единица равна $\sqrt{\varepsilon}$ или ε, где ε — основная единица поля $k(\sqrt{D})$, смотря по тому, разрешимо ли в целых рациональных числах уравнение $x^2-Dy^2=-1$ или нет. Это неверно. Уравнение $x^2-7y^2=-1$ решений не имеет, а основной единицей поля является не $\varepsilon=8+3\sqrt{7}$, а $\eta=\frac{3+\sqrt{7}+\sqrt{-7}+3\sqrt{-1}}{2}$, причем $\eta^2=\varepsilon\sqrt{-1}$.

Последняя возможность, очевидно, упущена автором.

В. Д. Подсыпанин

2512. Диофантовы уравнения, сепарабельные в циклических полях. Розенталл (Diophantine equations separable in cyclotomic fields. Rosenthall E.), Duke Math. J., 1953, 20, № 2, 217—232 (англ.)

Рассматриваются мультипликативные диофантовы уравнения, содержащие целые рациональные числа, а также идеалы соответствующих циклических полей и их нормы.

Указан эффективный алгоритм для полного решения этих уравнений. В частности, автор показывает, что уравнение

$$x_1^p+x_2^p+\ldots+x_m^p=0\ (p\text{ — нечетное простое})$$

может быть полностью решено в целых рациональных числах для $m\geqslant 4(p-2)$ путем сведения его к системе линейных однородных уравнений.

Н. Г. Чудаков

2513. Замечание о последней теореме Ферма. Дюпарк, Вейнгарден (A remark on Fermat's last theorem. Duparc H. J. A., Wijngaarden A. van), Nieuw. arch. wiskunde, 1953, 1, № 2, 123—128 (англ.)

Пусть

$$x^p+y^p=z^p, \tag{1}$$

где $z>y>x>0$ — целые числа; $(p, xyz)=1$, p — простое >7. Авторы статьи основываются на элементарно доказываемых теоремах об уравнении (1) и на теореме Фуртвенглера (если q есть простой делитель xyz, то $q^{p-1}\equiv 1\pmod{p^2}$) и получают неравенство

$$z>0{,}5c^p,\quad c>\frac{p^3}{3+\log 2p}-p.$$

Используя затем известный результат, что для уравнения (1) $p\geqslant 253747889$ (Lehmer D. H., Lehmer E., Bull. Amer. Math. Soc., 1941, 47, 139—142), находят

$$z>10^{6\cdot 10^8},\quad z^p>10^{1{,}5\cdot 10^{11}}.$$

П. Н. Ремеров

2514. Доказательство последней теоремы Ферма для $n=2(8a+1)$. Грайселл (Proof of Fermat's last theorem for $n=2(8a+1)$. Griselle Thomas), Math. Mag., 1953, 26, № 5, 263 (англ.)

Совершенно элементарно доказывается, что если m — нечетное простое число, не имеющее вида $8a+1$, то неопределенное уравнение $x^{2m}+y^{2m}=z^{2m}$ не имеет решений в целых числах, не делящихся на m. Заголовок работы не соответствует ее содержанию. *В. Д. Подсыпанин*

2515. Теорема взаимности для сумм Дедекинда. Карлиц (The reciprocity theorem for Dedekind sums. Carlitz L.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 3, 523—527 (англ.)

Пусть

$$\bar{s}(h,k)=\sum_{r\,(\mathrm{mod}\,k)}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \qquad (1)$$

— сумма Дедекинда, где $((x))=x-[x]-{}^1/_2$, а суммирование распространяется на полную систему вычетов (mod k). Для сумм $\bar{s}(h,k)$, где $(h,k)=1$, известен следующий закон взаимности:

$$12hk\{\bar{s}(h,k)+\bar{s}(k,h)\}=h^2+3hk+h^2+1 \qquad (2)$$

(Rademacher H., Whiteman A., Amer. J. Math., 1941, **63**, 377—407).

Дается простое доказательство формулы (2) и ее обобщения, принадлежащего Апостолу (Apostol T. M., Duke Math. J., 1950, **17**, 147—157). *А. В. Малышев*

2516. О теореме Штикельбергера. Карлиц (A theorem of Stickelberger. Carlitz L.), Math. scand., 1953, **1**, № 1, 82—84 (англ.)

Намечено новое доказательство теоремы: Пусть $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами, дискриминант D которого есть число нечетное (тогда легко видеть, что $D\equiv 1\pmod 4$). Если $f(x)\equiv f_1(x)\ldots f_s(x)\pmod 2$ есть разложение $f(x)$ на неприводимые по mod 2 многочлены, то $\left(\frac{D}{2}\right)=(-1)^{n-s}$, причем $\left(\frac{D}{2}\right)$ есть символ Кронекера: $\left(\frac{D}{2}\right)=+1$ при $D\equiv 1\pmod 8$ и $\left(\frac{D}{2}\right)=-1$ при $D\equiv 5\pmod 8$.

В изложении имеются неточности; например, в § 4 автор пишет равенство: $D=d_1\ldots d_sm^2$ (m — целое, $d_1,\ldots,d_s$ — дискриминанты многочленов $f_1(x),\ldots,f_s(x)$). Это равенство неверно и должно быть (по смыслу дальнейшего) заменено сравнением по mod 8; такое сравнение неочевидно и автором не обосновано. *Б. А. Венков*

2517. О распределении символов Якоби. Брауэр (On the distribution of the Jacobian symbols. Brauer Alfred), Math. Z., 1953, 58, № 3, 226—231 (англ.)

Исследуется вопрос о количестве пар вида $(a, a+1)$ в полной системе вычетов по модулю m, имеющих данные значения символов Якоби $\left(\frac{a}{m}\right)$ и $\left(\frac{a+1}{m}\right)$. Такие пары могут быть 9 типов: (1,1), (1,—1), (1, 0), ..., (0, 0). Выводятся формулы для количества пар любого из этих типов в случае произвольного нечетного и свободного от квадратов числа m. Эти формулы являются обобщением хорошо известных результатов для случая, когда m есть простое число. *А. А. Киселев*

2518. Замечание о формуле для чисел Бернулли. Карлиц (Remark on a formula for the Bernoulli numbers. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 3, 400—401 (англ.)

Отмечается, что формула

$$B_{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{2^{k+1}-1}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{\Delta^r 1^k}{2^{r+1}}\quad(k\geqslant 0), \qquad (1)$$

где B_{k+1} есть $(k+1)$-е число Бернулли, $\Delta^r 1^k=\Delta^r x^k\big|_{x=1}$ — разность порядка r, недавно доказанная Гарабедяном (Garabedian H. L., Bull. Amer. Math. Soc., 1940, **46**, 531—533), была уже известна ранее (Worpitzky J., J. reine und angew. Math., 1883, **94**, 203—232). Дается элементарное доказательство указанной формулы. *А. В. Малышев*

2519. Заметка о некоторых тождествах. Карлиц (Note on some partition identities. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 4, 530—534 (англ.)

Пусть

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^k=\sum_{m=0}^{\infty}p_k(m)\,x^m.$$

Элементарно доказывается, что для $k=2, 4, 6$

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_k(r_m+r_k)\,x^m=f_k(r)\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{rn})^k,$$

где

$$r_k=\begin{cases}(r^2-1)/12 \text{ при } k=2,\ 3\neq r\equiv 3\pmod 4\\ \qquad\text{и } r\equiv 5\pmod{12};\\ (r^2-1)/6 \text{ при } k=4,\ r\equiv 5\pmod 6;\\ (r^2-1)/4 \text{ при } k=6,\ r\equiv 3\pmod 4;\end{cases}$$

$$f_k=\begin{cases}+1 \text{ при } k=2,\ 3\neq r\equiv 3\pmod 4;\\ -1 \text{ при } k=2,\ r\equiv 5\pmod{12};\\ -r \text{ при } k=4,\ r\equiv 5\pmod 6;\\ r^2 \text{ при } k=6,\ r\equiv 3\pmod 4.\end{cases}$$

Справедливость формулы при других значениях k и r не исследуется. *В. Д. Подсыпанин*

2520. Задачи на обратное расположение цифр. Капрекар (Problems involving reversal of digits. Kaprekar D. R.), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 81—82 (англ.)

Приводятся числовые тождества, дающие решение системы диофантовых уравнений

$$x_1+\ldots+x_l=y_1+\ldots+y_l,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^k+\ldots+x_l^k=y_1^k+\ldots+y_l^k$$

при некоторых k и l. Эти решения обладают тем свойством, что, если написать подряд цифры чисел

$x_1, \ldots, x_l$ и $y_1, \ldots, y_l$, то вторая последовательность цифр обратна первой. *В. Д. Подсыпанин*

2521. **Веселые эпитеты при вычислении $\sqrt{2}$.** **Улер** (Humorous epithets as applied to the calculation of $\sqrt{2}$. Uhler H. S.), Scripta math., 1953, 19, № 1, 78—79 (англ.)

Приводятся выражения, употреблявшиеся разными авторами при вычислении $\sqrt{2}$. *В. Д. Подсыпанин*

2522 **РЕЦ.** **Введение в теорию чисел.** **Нейсс** (Einführung in die Zahlentheorie. Neiß F., S. VIII+113, Leipzig; S. Hirzel Verlag, 1952, 4.80 DM) [**Рецензия:** **Хофрейтер** (Hofreiter N.), Monatsh. Math., 1953, 57, № 2, 174 (нем.)]

См. также: 2468, 2473, 2474, 2570, 2690, 2720

АЛГЕБРА

ГРУППЫ

2523. **О разложении группы по двойному модулю.** **Фукс** (Über die Zerlegung einer Gruppe nach zwei Untergruppen. Fuchs L.), Monatsh. Math., 1953, 57, № 2, 109—112 (нем.)

Пусть H и K — подгруппы группы G, A — пересечение всех комплексов вида $g^{-1}HgK$, где g — любой элемент группы. Пусть $[H; K] = A \cap A^{-1}$, где A^{-1} — комплекс, состоящий из элементов, обратных элементам A.

Доказывается: 1) Разложение группы G

$$G = HL + HaL + HbL + \ldots$$

по двойному модулю (H, L) тогда и только тогда является продолжением разложения группы G по двойному модулю (H, K), если $[H; L] \subseteq [H; K]$.

2) Смежные системы разложения группы G по двойному модулю (H, K) тогда и только тогда образуют группу относительно операции умножения этих систем как комплексов, если $[H; K]$ является нормальным делителем группы G и $[H; K] = [K; H]$. *А. П. Дицман*

2524. **Гиперцентр группы.** **Бер** (The hypercenter of a group. Baer Reinhold), Acta math., 1953, 89, № 3—4, 165—208 (англ.)

Пусть G — произвольная группа и

$$Z_0 = 1 < Z_1 < \ldots < Z_\alpha < \ldots$$

— возрастающая цепочка ее подгрупп (знак $<$ употребляется здесь для обозначения истинной части группы), удовлетворяющих следующим условиям:

1) $Z_{\alpha+1} / Z_\alpha$ — центр группы G / Z_α,

2) для предельного порядкового α группа Z_α является объединением всех Z_ν при $\nu < \alpha$.

Тогда существует такое порядковое число γ, для которого $Z_{\gamma+1} = Z_\gamma$. Так определенная группа Z_γ называется гиперцентром (верхним) группы G и обозначается через $U(G)$. Изучению нормальных делителей группы G, содержащихся в ее гиперцентре $U(G)$, и посвящена в основном реферируемая работа.

Если $U(G) = G$, т. е. если группа G является ZA-группой, то ее нормальные делители N обладают следующим свойством (Черников С. Н., Мат. сб., 1948, 22 (64), № 2, 319—348): если M — произвольный нормальный делитель группы G и $M < N \leqslant G$, то фактор-группа N/M содержит отличный от единицы элемент центра фактор-группы G/M.

В реферируемой работе показано, что этим свойством обладают не только нормальные делители ZA-группы, но также и нормальные делители произвольной группы G, содержащиеся в ее гиперцентре $U(G)$.

В связи с этим дается следующее определение:

Подгруппа N группы G называется ее верхней гиперцентральной подгруппой, если для произвольного нормального делителя M группы G, являющегося истинной подгруппой группы N, фактор-группа N/M содержит отличный от единицы элемент центра фактор-группы G/M.

В работе установлено, что все верхние гиперцентральные подгруппы G являются ее нормальными делителями и содержатся в ее гиперцентре. Оказалось, что некоторые основные свойства гиперцентральных подгрупп произвольной группы являются по существу повторением известных свойств нормальных делителей ZA-групп. К числу таких свойств относятся, например, два следующих:

1. Если гиперцентральная подгруппа N группы G содержит отличный от нее нормальный делитель M группы G и x — произвольный элемент группы N/M, имеющий порядок, равный степени простого числа p, а g — произвольный элемент из G/M, то существует такое натуральное число $m = f(x, y)$, что $xg^{p^m} = g^{p^m}x$. Для случая ZA-групп более общее свойство установлено в работе С. Н. Черникова (Мат. сб., 1946, 18 (60), № 3, 397—422, теорема 3).

2. Если N — гиперцентральная подгруппа группы G и T — какая-нибудь подгруппа группы G, удовлетворяющая условию $T < NT$, то нормализатор подгруппы T в NT отличен от T. В случае ZA-групп (как конечных, так и бесконечных) это свойство совпадает просто с нормализаторным условием, которому, как известно, они удовлетворяют (Черников С. Н., Мат. сб., 1939, 6(48), № 2, 199—214, доказательство теоремы 5). К числу основных свойств верхних гиперцентральных подгрупп Бер относит также следующее свойство:

3. Если верхняя гиперцентральная подгруппа N группы G содержит отличный от нее нормальный делитель M группы G, то в G существует такой нормальный делитель V, что $M < V \leqslant N$ и что M совпадает с пересечением всех нормальных делителей X группы G, для которых $M \leqslant X < V$ и фактор-группа V/X является конечным минимальным нормальным делителем группы G/X. В случае ZA-групп это свойство очевидно.

В реферируемой работе установлено, что каждая из двух комбинаций (1,3) и (2,3) приведенных здесь свойств вполне характеризует верхние гиперцентральные подгруппы.

В случае верхних гиперцентральных подгрупп без кручения обращает на себя внимание следующее обобщение хорошо известного свойства ZA-групп без кручения: если верхняя гиперцентральная подгруппа N группы G является группой без кручения,

то фактор-группа группы G по централизатору подгруппы N является также группой без кручения. Из этого предложения Бер выводит, что если для произвольного элемента $x \neq 1$ верхней гиперцентральной подгруппы N без кручения и произвольного элемента g группы G имеет место при некоторых натуральных числах m и n соотношение $x^n g^m = g^m x^n$, то $xg = gx$.

Произвольную подгруппу N, обладающую свойством 3, Бер называет локально конечно приводимой. Таким образом, каждая верхняя гиперцентральная подгруппа произвольной группы локально конечно приводима. Из многочисленных свойств локально конечно приводимых подгрупп, полученных автором, отметим следующее (см. следствие на стр. 198): локально конечно приводимая p-группа является ZA-группой.

Вводятся и изучаются также и нижние гиперцентральные подгруппы.

Последний раздел реферируемой работы посвящен ZA-группам с конечным числом образующих элементов. В нем даются условия, при которых локально конечно приводимая группа является ZA-группой с конечным числом образующих элементов, причем по ходу дела формулируется предложение о конечности верхнего центрального ряда ZA-групп с конечным числом образующих элементов. Это предложение не ново (Мальцев А. И., Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, 13, 201—212).

С. Н. Черников

2525. Гиперцентр группы. II. Бер (Das Hyperzentrum einer Gruppe. II. Baer Reinhold), Arch. Math., 1953, 4, № 2, 86—96 (нем.)

Дается следующее определение гиперцентральности нормального делителя: нормальный делитель N группы G называется гиперцентральным в G, если для каждой подгруппы U из G и для каждого нормального делителя V подгруппы U, имеющего в ней конечный индекс, группа $(U \cap N)V/V$ гиперцентральна в U/V, в смысле определения верхней гиперцентральности в I части статьи (см. реф. 2524).

В силу такого определения гиперцентральными оказываются, например, все нормальные делители произвольной p-группы. Гиперцентральный нормальный делитель произвольной группы G может не содержаться в ее гиперцентре $U(G)$ и, значит, может не быть гиперцентральным в смысле старого определения гиперцентральной подгруппы (например, в бесконечной разрешимой p-группе без центра). Связь между старым и новым понятием гиперцентральности устанавливается следующей теоремой:

Подгруппа U группы G тогда и только тогда верхне-гиперцентральна (и, значит, просто гиперцентральна в смысле старого определения гиперцентральной подгруппы), когда она является локально конечно приводимым гиперцентральным нормальным делителем группы G.

Устанавливается ряд свойств гиперцентральных нормальных делителей, из них основными являются следующие:

1) если N — гиперцентральный нормальный делитель группы G и U — некоторая подгруппа из G, то $N \cap U$ — гиперцентральный нормальный делитель подгруппы U;

2) если N — гиперцентральный нормальный делитель группы G и M — какой-нибудь нормальный делитель из G, то NM/M — гиперцентральный нормальный делитель группы G/M;

3) если M и N — такие нормальные делители группы G, что $M \subset N$ и $M \neq N$, то необходимым и достаточным условием гиперцентральности нормального делителя N в G является гиперцентральность нормальных делителей M и N/M, соответственно, в группах G и G/M;

4) произведение гиперцентральных нормальных делителей группы G является ее гиперцентральным нормальным делителем.

На основании последнего из этих свойств дается следующее определение: гиперцентром (обобщенным) группы G называется произведение всех ее гиперцентральных нормальных делителей; обобщенный гиперцентр отличен, вообще говоря, от гиперцентра необобщенного.

Изучаются также некоторые классы нормальных делителей, промежуточные между классом гиперцентральных нормальных делителей (в смысле нового определения) и классом гиперцентральных подгрупп (в смысле старого определения).

С. Н. Черников

2526. Нильпотентные характеристические подгруппы конечных групп. Бер (Nilpotent characteristic subgroups of finite groups. Baer Reinhold), Amer. J. Math., 1953, 75, № 3, 633—664 (англ.)

Рассматриваются только конечные группы. Через $H(G)$ обозначается гиперцентр, т. е. последний член возрастающей центральной цепи группы G, через $\Phi(G)$ — пересечение всех максимальных подгрупп, а через $F(G)$ — произведение всех нильпотентных нормальных делителей группы G.

Далее используются понятия n-элемента, n- и Pn-группы, n-разрешимости и n-нильпотентности (РЖМат, 1953, 598).

Свойство слабой гиперцентральности нормального делителя N в группе G определяется одним из следующих трех эквивалентных условий (M означает произвольный нормальный делитель группы G, содержащий N, а $[M : N]$ — индекс N в M):

1. Если $x \in N$, $y \in M$ и порядок $o(x)$ элемента x взаимно прост как с $[M : N]$, так и с $o(y)$, то $xy = yx$.

2. N нильпотентен и множество $[M : N]$-элементов в M составляет подгруппу.

3. Если j делится на $[M : N]$, то M разлагается в прямое произведение j-группы и Pj-группы.

Если M и $N \subset M$ — два нормальных делителя группы G, то для слабой гиперцентральности M в G необходима и достаточна слабая гиперцентральность N в G и M/N в G/N.

Слабым гиперцентром $H_w(G)$ группы G называется пересечение всех ее максимальных слабо гиперцентральных нормальных делителей. Произведение MN двух слабо гиперцентральных нормальных делителей группы G необязательно слабо гиперцентрально в G. Оно будет таким, если один из множителей содержится в $H_w(G)$ или если порядки M и N взаимно просты.

Если натуральные числа m и n взаимно просты, то группа G тогда и только тогда распадается в прямое произведение m-группы и n-группы, когда $G/\Phi(G)$ распадается в такое произведение.

Справедливо соотношение: $\Phi(G)H(G) \subset H_w(G) \subset F(G)$. Группа $F[G/\Phi(G)] = F(G)/\Phi(G)$ есть абелева группа, порядки элементов которой свободны от квадратов. Пусть M — минимальный нормаль-

ный делитель группы G, а Z — его централизатор в G. Если GZ содержит неединичный нормальный делитель, порядок которого взаимно прост с порядком M, то M коммутативен и существует подгруппа $S \subset G$, для которой $S \cap M = 1$ и $SZ = G$.

Даются некоторые критерии разрешимости группы. В частности, группа тогда и только тогда разрешима, когда для любой ее подгруппы S (или факторгруппы Q) выполняется условие $\Phi(S) < F(S)$ (соответственно $\Phi(Q) < F(Q)$). Группа G тогда и только тогда n-разрешима, когда каждый ее главный фактор C удовлетворяет одному из трех условий: C абелев, $C^n = 1$, $C^{1-n} = 1$.

Если n-группа G n-нильпотентна, то $G^n \subset \Phi(G)$. Разрешимая n-группа G тогда и только тогда n-нильпотентна, когда $S^n \subset \Phi(S)$ для каждой ее подгруппы S. *В. М. Глушков*

2527. О $\mathfrak{P}$-адических целочисленных представлениях конечных групп. Маранда (On $\mathfrak{P}$-adic integral representations of finite groups. Maranda Jean-Marie), Canad. J. Math., 1953, 5, № 3, 344—355 (англ.)

Рассматриваются представления конечной группы (и группового кольца) матрицами с элементами, являющимися целыми $\mathfrak{P}$-адическими числами. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа конечного порядка N; $\mathfrak{P}^{k_0}$ — наивысшая степень $\mathfrak{P}$, делящая N; $\mathfrak{H}$ — групповое кольцо над $\mathfrak{G}$; x — произвольный элемент из $\mathfrak{H}$.

Важнейшие из доказанных теорем:

2. Два $\mathfrak{P}$-адических целочисленных представления группового кольца $\mathfrak{H}$ унимодулярно эквивалентны в том и только в том случае, если они унимодулярно эквивалентны mod $\mathfrak{P}^k$ для некоторого $k > k_0$.

3. Пусть $\vartheta(x)$ — $\mathfrak{P}$-адическое целочисленное представление степени n группового кольца $\mathfrak{H}$. Если для некоторой матрицы Q степени n $|Q| \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ и

$$Q^{-1}\vartheta(x)Q = \begin{pmatrix} \Gamma(x) & \Lambda(x) \\ \mathfrak{P}^k\theta(x) & \Delta(x) \end{pmatrix} (k > 2k_0)$$

(т. е $\vartheta(x)$ имеет модулярные конституенты $\Gamma(x)$ и $\Delta(x)$ по модулю $\mathfrak{P}^k$), то существует такая матрица T степени n, что $|T| \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ и

$$T^{-1}\vartheta(x)T = \begin{pmatrix} \Gamma^*(x) & \Lambda(x) \\ & \Delta^*(x) \end{pmatrix}$$

(т. е. $\vartheta(x)$ имеет конституенты $\Gamma^*(x)$ и $\Delta^*(x)$). При этом для любого x из $\mathfrak{H}$ $\Gamma^*(x) \equiv \Gamma(x)$ и $\Delta^*(x) \equiv \Delta(x) \pmod{\mathfrak{P}^{k-k_0}}$.

4. Если $\vartheta(x)$ унимодулярно разложимо mod $\mathfrak{P}^k$ $(k > 2k_0)$:

$$\vartheta(x) \sim \begin{pmatrix} \Gamma(x) & \\ & \Delta(x) \end{pmatrix},$$

то $\vartheta(x)$ разложимо:

$$\vartheta(x) \sim \begin{pmatrix} \Gamma^*(x) & \\ & \Delta^*(x) \end{pmatrix};$$

при этом $\Gamma^*(x) \equiv \Gamma(x)$ и $\Delta^*(x) \equiv \Delta(x) \pmod{\mathfrak{P}^{k-k_0}}$ для любого x из $\mathfrak{H}$. *В. К. Туркин*

2528. Локальные сечения в локально компактных группах. Мостерт (Local cross sections in locally compact groups. Mostert Paul S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 645—649 (англ.)

Подгруппа H топологической группы G имеет локальное сечение, если существует открытое множество U в пространстве классов смежности G/H и непрерывная функция f, определенная на U со значениями в G, такие, что $pf(x) = x$ для $x \in U$ (p — естественное отображение G на G/H). Если G является локально компактной метрической группой со счетной базой и имеет конечную размерность, а H — замкнутая подгруппа в G, то H обладает локальным сечением и G является косым произведением над G/H. *Н. Я. Виленкин*

2529. Замечание о применении собственных преобразований Лоренца к уравнениям Дирака. Брдичка (A remark on proper Lorentz transformation of Dirac's equations. Brdička M.), Bull. internat. Acad. tchèque sci. Cl. sci. math., natur. et méd., 1950, 51, 101—108 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

При доказательстве инвариантности системы уравнений Дирака относительно преобразований группы Лоренца обычно ограничиваются тем, что определяют, как преобразуется четырехкомпонентная волновая функция при вращениях относительно осей координат и при одном специальном преобразовании Лоренца (см., например, Дирак П. А. М., Основы квантовой механики, ОНТИ, М.—Л.,1937).

В работе выписывается в явном виде матрица, определяющая преобразование волновой функции при общем собственном преобразовании Лоренца (т. е. при преобразовании Лоренца с детерминантом, равным единице), сохраняющее вид системы уравнений Дирака; тем самым даются явные формулы, задающие биспинорное представление собственной группы Лоренца. Указывается, что эти формулы определяются неоднозначно, и обсуждаются различные возможности (последнее обстоятельство, очевидно, связано с тем, что рассматриваются только преобразования собственной группы). *А. М. Яглом*

2530 К. Введение в теорию конечных групп. Леддерман (Introduction to the theory of finite groups. Ledermann Walter, pp. 160, Oliver and Boyd, Edinburgh — London, Interscience, New York, 1953, 1.55 doll.), Science, 1953, 118, № 3063, 310 (библ.)

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

2531. О свободных кольцах и их подкольцах. Витт (Über freie Ringe und ihre Unterringe. Witt Ernst), Math. Z., 1953, 58, № 2, 113—114 (нем.)

Дается более простое доказательство теоремы Куроша о подалгебрах свободной неассоциативной алгебры. Автор сообщает, что ему известно доказательство теоремы о том, что всякая подалгебра свободной лиевой алгебры свободна.

Эта теорема независимо от автора сформулирована и доказана референтом (РЖМат, 1954, 2030). *А. И. Ширшов*

2532. Фундаментальная группа главной компоненты коммутативной банаховой алгебры. Блум (The fundamental group of the principal component of a commutative Banach algebra. Blum

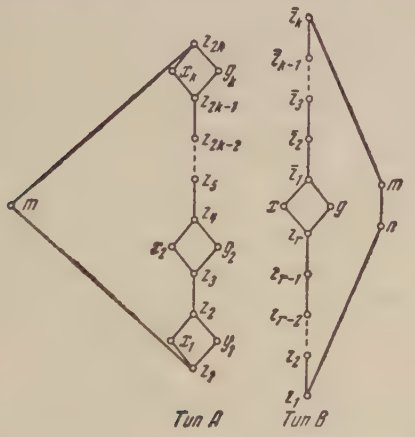
Edward K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 3, 397—400 (англ.)

Как известно, совокупность регулярных (т. е. имеющих обратные) элементов коммутативного нормированного кольца B образует в B открытое множество G; главная компонента $G_1 \subset G$ (содержащая единицу e кольца B) представляет собою мультипликативную топологическую группу.

Основной результат автора: фундаментальная группа $\pi(G_1)$ изоморфна аддитивной группе элементов $x \in B$, удовлетворяющих уравнению $\exp(x) = e$. Дается два доказательства; одно, основанное на теореме Шрейера (Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 1938, ОНТИ, М.—Л., гл. 8), и второе, базирующееся на следующих леммах: 1) если уравнение $w = \exp(x)$ разрешимо для данного $w = w_0$, то оно разрешимо для всех w, достаточно близких к w_0; 2) для всякой кривой $K = \{f(s)\} \subset G_1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, $f(0) = e$, $f(1) = w$, уравнение $w = \exp(x)$ разрешимо и кривая $\exp(tx)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, гомотопна в G_1 кривой K; 3) каждая замкнутая кривая в G_1, проходящая через e, гомотопна в G_1 кривой вида $\exp(tb)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\exp(b) = e$; если $\exp(b_1) = \exp(b_2) = e$, $b_1 \neq b_2$, то кривые $\exp(tb_1)$ и $\exp(tb_2)$ негомотопны; в каждом классе гомотопии группы G_1 имеется ровно одна кривая вида $\exp(tb)$, где $\exp(b) = e$. *Г. Е. Шилов*

2533. Заметка о свободных дедекиндовых структурах. Тролл, Данкан (Note on free modular lattices. Thrall R. M., Duncan D. G.), Amer. J. Math., 1953, 75, № 3, 627—632 (англ.)

Изучается вопрос о конечности свободных дедекиндовых структур, порожденных некоторыми множествами элементов. Строятся свободные дедекиндовы структуры типов A и B, порожденные образующими множествами, изображенными на рисунке.



Эти свободные структуры оказываются конечными и задаются перечислением существенно различных типов их элементов. Множество $2 + 1 + 1$ является множеством типа B, и тем самым решена проблема 29 книги Г. Биркгофа (Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952) — построена свободная дедекиндова структура, порожденная этим множеством.

Проективным множеством называется структура вида $P = \{t; x, y, z; w\}$, причем t является пересечением, а w — объединением каждой пары элементов x, y, z. Свободная дедекиндова структура L_v, порожденная двумя проективными множествами $P_1 = \{t; x, y, z; w\}$ и $P_2 = \{t; x, y, u; w\}$, имеет бесконечную размерность. *А. Х. Лившиц*

2534. Понятия замыкания и открытого ядра в структурах. Аумann (Über Hüllen- und Kernbildungen auf Verbänden. Aumann Georg), J. reine und angew. Math., 1953, 191, № 1—2, 50—53 (нем.)

Рассматривается полная структура A с двумя выделенными подмножествами F и G, удовлетворяющими следующим условиям: 1) F полно снизу (т. е. любое множество элементов из F имеет наибольшую нижнюю грань), 2) G полно сверху, 3) $1 \in F$, 4) $0 \in G$. Для любого $h \in A$ замыкание h^s и открытое ядро h^i определяются следующим образом:

$$h^s = \bigcap f\{h \leqslant f \in F\},\quad h^i = \bigcup g\{h \geqslant g \in G\}.$$

Положим $(h^x)^y = h^{xy}$. Тогда $h^{xx} = h^x$ при $x = s, i, (si), (is)$. Упорядоченная пара элементов (g, f) называется связной парой относительно F, G, если $g \in G$, $f \in F$ и $g^s = f$, $f^i = g$. Элемент $h \in A$ будет первым (вторым) элементом связной пары тогда и только тогда, когда $h^{si} = h$ ($h^{is} = h$). Пусть $\tilde{F}$ (соответственно $\tilde{G}$) — множество всех $h \in A$ таких, что $h^{is} = h$ (соответственно $h^{si} = h$). Тогда $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ ($\tilde{F} \subset F$, $\tilde{G} \subset G$) суть полные структуры и соответствие $g \to g^s$, $f \to f^i$ осуществляет изоморфизм между $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$.

Даются примеры из топологии, теории функций и др.:

1. Пусть T — полная структура всех подмножеств топологического пространства T_0 и F (соответственно G) система всех замкнутых (соответственно открытых) множеств. Тогда для $M \in T$ M^s есть замыкание и M^i есть открытое ядро. Множество M называется каноническим, если (M^i, M^s) образует связную пару. $\tilde{G}$ (соответственно $\tilde{F}$) есть система открытых (соответственно замкнутых) канонических множеств. Канонические открытые множества образуют полную структуру с единицей T_0.

2. Пусть V — полная структура всех действительных функций h, определенных на T_0. Пусть G (соответственно F) — система всех функций, непрерывных снизу (соответственно сверху).

Функция f называется минимально разрывной, если (f^i, f^s) есть связная пара, т. е. $f^{si} = f^i \leqslant f \leqslant f^s = f^{is}$. Это определение оправдывается теоремой: Если T_0 — полное (метрическое) пространство и f — минимально разрывная функция, то не существует функции φ, которая совпадает с f во всех точках, где f непрерывна и имеет больше точек непрерывности, чем f.

3. V — частично упорядоченное множество, A — полная структура, T — полная структура всех отображений t множества V в A. Пусть F (соответственно G) — множество всех монотонно возрастающих (соответственно убывающих) отображений: из $v_1 \leqslant v_2$ следует $t(v_1) \leqslant t(v_2)$ (соответственно $t(v_1) \geqslant t(v_2)$). Тогда определение h^i, h^s можно видоизменить следующим образом: для $x \in V$

$$t^i(x) = \bigcap t(y)\{y \leqslant x\},\quad t^s(x) = \bigcup t(y)\{y \leqslant x\}.$$

Если A есть числовая прямая, дополненная элементами $\pm\infty$, то имеет место следующая теорема:

Пусть B — булева структура и q — действительная функция, определенная на $B_0 = B \setminus \{0\}$. Для того чтобы q была вторым элементом связной пары (p, q), необходимо и достаточно условие: для любого непустого $M \subset B_0$, имеющего $\bigcup M = S$, $q(S) = \sup q(C)$ $\{C \in M\}$. *А. Д. Тайманов*

2535. Ассоциативные системы всех частичных преобразований (Поправка). Ляпин Е. С., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 4, 692

Приводится дополнительное пятое условие для принадлежности системы $\mathfrak{A}$ к классу Σ_1 (РЖМат, 1953, 115): для любых ненулевых элементов $A, B \in \mathfrak{A}$ существует единственный элемент $X \in \mathfrak{A}$ такой, что AXB отлично от нулевого элемента.

2536 Д. О нильпотентных алгебрах в связи с исследованиями Молина. Тамм М. И. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Тартуский гос. ун-т, Тарту, 1953

См. также: 2468, 2470, 2473, 2475, 2477, 2489, 2500, 2507, 2516, 2542, 2543, 2576, 2584, 2605 К, 2618, 2619, 2623, 2625, 2630, 2711, 2719

ТОПОЛОГИЯ

2537. К комбинаторной топологии незамкнутых множеств. Александров П. С., Мат. сб., 1953, 33(75), № 2, 241—260

В работе дается прежде всего явная формулировка и доказательство следующего предложения, доказанного еще в статье «Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств» того же автора (Мат. сб., 1947, 21 (63), 161—232) и имеющего применения в теории двойственности:

В направленном множестве всех триангуляций, покрывающих в данном R^n данное множество $A \subset R^n$, существует конфинальная часть (состоящая из так называемых канонических триангуляций), которая является вместе с тем конфинальной частью направленного множества нервов всех покрытий множества A. При этом, если каноническая триангуляция K_β следует за канонической триангуляцией K_α, то соответствующее каноническое покрытие β вписано в каноническое покрытие α, и естественный сдвиг K_β в K_α порождает обычную проекцию нерва β в нерв α.

Из этой теоремы выводится общая теорема инвариантности, утверждающая — в широких предположениях — изоморфизм групп, определенных на основе циклов и гомологий в окрестностях множества A, и групп, определенных на самом множестве A посредством циклов и гомологий на нервах покрытий этого множества.

В § 3 выясняется, как далеко идет параллелизм между теоремами двойственности Александрова и Ситникова (последняя для бикомпактной области коэффициентов).

В § 4 рассматривается следующее свойство точечного множества $A \subset R^n$: Для каждой окрестности λ множества A можно подобрать такую меньшую окрестность λ', что всякий p-мерный цикл, лежащий в λ', гомологичен нулю в λ. Доказывается, что это свойство является топологическим инвариантом множества A. Инвариантным является и свойство, полученное из данного посредством локализации. Для компактов последнее свойство, как легко видеть, приводит к характеризации размерности. Неизвестно, можно ли аналогичным путем получить и характеристику размерности незамкнутых множеств.

В § 5 доказывается следующая «теорема о препятствиях» для множеств A типа F_σ: если $\dim A = p$, $A \subset R^n$ и A есть множество типа F_σ, то существует шар U^n и в $U^n \setminus A$ — цикл с компактным носителем размерности $n - p - 1$, который не ограничивает компактно в $U^n \setminus A$. Вообще, для того чтобы p-мерное множество $A \subset R^n$ содержало p-мерный компакт, необходимо и достаточно, чтобы в R^n существовал шар U^n, обладающий тем свойством, что в $U^n \setminus A$ лежит некоторый $(n - p - 1)$-мерный компактный цикл, не гомологичный нулю в $U^n \setminus A$ скользящим образом. *К. А. Ситников*

2538. Пересечение и замыкание. Готшок (Intersection and closure. Gottschalk W. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 3, 470—473 (англ.)

Используя понятие отделимости множеств, автор при помощи (равномерно) непрерывных функций исследует вопрос о совпадении замыкания пересечения двух множеств (равномерного) пространства с пересечением замыканий этих множеств. *Ю. М. Смирнов*

2539. Однородные пространства. Исбелл (Homogeneous spaces. Isbell J. R.), Duke Math. J., 1953, 20, № 3, 321—329 (англ.)

Обобщаются исследования Куратовского и Ван-Данцига об однородных и локально однородных пространствах.

Основная теорема: в локально однородных линейных континуумах нет сходящихся несчетных последовательностей; если локально однородный линейный континуум содержит хотя бы одну монотонную несчетную последовательность, то он однороден, в противном случае он однороден по Биркгофу. *Ю. М. Смирнов*

2540. Основные понятия общей топологии. Калаби (Notions fondamentales de topologie générale. Calabi L.), Rev. questions scient., 1953, 14, 393—411 (франц.)

Первая часть популярной статьи об основных понятиях абстрактной топологии. *Ю. М. Смирнов*

2541. Теорема об отделении для конечных систем плоских континуумов. Рейфенберг (A separation theorem for finite sets of plane continua. Reifenberg E. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, 49, № 3, 573 (англ.)

Доказывается, что если объединение конечного множества плоских континуумов содержащих об-

щую точку P, разделяет точки A и B, то объединение некоторых двух из этих континуумов также разделяет эти точки. *А. И. Сирота*

2542. **Булевы кольца и ∇-гомологии. Уоллес** (Boolean rings and cohomology. Wallace A. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 3, 475 (англ.)

Доказывается, что булево кольцо обратного спектра нульмерных бикомпактных пространств изоморфно прямому спектру булевых колец этих пространств. *Ю. М. Смирнов*

2543. **О числе образующих гомотопических групп полиэдров. Спроси,** (多面體の homotopy groups の generators について. 白石毅), 數學 (Сугаку), 1953, 4, № 4, 44—45 (япон.)

Доказано, что если конечный связный полиэдр асферичен во всех размерностях, больших единицы и меньших n, и если его n-мерная гомотопическая группа изоморфна n-мерной гомотопической группе его n-мерного остова, то для того чтобы эта гомотопическая группа имела конечное число образующих, необходимо и достаточно, чтобы фундаментальная группа полиэдра была конечна. Автор отмечает, что для n-мерных полиэдров эта теорема была доказана Ляо (Liao S. D., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, № 6, 763—768). По мнению референта, теорема автора непосредственно следует из теоремы Ляо. *М. М. Постников*

2544. **Примеры и контрпримеры. Бинг** (Examples and counterexamples. Bing R. H.), Pi Mu Epsilon J., 1953, 1, 311—317 (1 pl.) (англ.)

Изложение нескольких топологических примеров.

Из Math. Rev, 1953, 14, № 8, 783.

2545. **О связи между топологией и метрикой в рамках элементарной геометрии. Хопф** (Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie. Hopf H.), Math.-Phys. Semesterber., 1953, 3, 16—29 (нем.)

Популярная лекция.

Из Math. Rev., 1953, 14, № 7, 678.

2546 К. **Общая топология. Бурбаки** (Topologie generale. Bourbaki N., Livre III de la Serie Elements de Mathematiques, pp. 90, Hermann et Cie, Paris, 1953), Euclides, 1953, 13, № 149—150, 311 (библ.)

См. также: 2468, 2471, 2473—2475, 2477, 2489, 2528, 2532, 2534, 2547, 2618, 2619

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2547. **О хаусдорфовой размерности множеств, характеризующихся числовыми свойствами. Фолькман** (Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. Volkmann Bodo), Math. Z., 1953, 58, № 3, 284—287 (нем.)

Пусть $0<\alpha\leqslant 1$ и $\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e_i}{g^i}$ — его g-адическое разложение, где e_i — целое, $0\leqslant e_i<g$, $g\geqslant 2$. Множество всех чисел

$$\sigma=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i}{g^i},$$

для которых $e_i\leqslant f_i$ $(i=1, 2, \ldots)$, обозначим через $\langle\alpha\rangle_g$. В работе определяется размерность множества $\langle\alpha\rangle_g$ относительно класса функций $\{\mu(t)\}$, непрерывных и монотонно возрастающих на сегменте $0\leqslant t\leqslant t_0$ и таких, что $\mu(0)=0$.

Используемое автором определение размерности множества является обобщением понятия хаусдорфовой размерности и совпадает с ним в случае $\mu(t)=t^{\beta}$, $\beta>0$. *И. Е. Жак*

2548. **Кардинальное число, соотнесенное семейству множеств. Гинсберг** (A cardinal number associated with a family of sets. Ginsburg Seymour), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 573—577 (англ.)

Пусть U — некоторое семейство непустых подмножеств множества R, упорядоченное по включению. Рассматривается максимальное семейство, состоящее из несравнимых элементов семейства U. Наименьшая из мощностей теоретико-множественных сумм элементов таких максимальных семейств обозначается через $\mathrm{md}(U)$. Наименьшая мощность, представляющая собой $\mathrm{md}(V)$ для некоторого $V\subset U$, коинициального с U, обозначается через $\mathrm{cmd}(U)$.

Основным результатом работы является доказательство соотношения

$$\prod_{\xi<\alpha}\mathrm{cmd}(U^{\xi})=\mathrm{cmd}\left(\prod_{\xi<\alpha}U^{\xi}\right),$$

где U^{ξ} — система подмножеств множества R^{ξ}, а $\prod_{\xi<\alpha}U^{\xi}$ определяется как семейство множеств

$$\{H\mid H=D^0\times D^1\times\ldots,\ D^{\xi}\in U^{\xi}\}.$$

Ф. И. Ариньш

2549. **О понятии интеграла. Пи-Кальеха** (On the concept of the integral. Pi Calleja Pedro), Revista Soc. Cubana, Cl. Fis. Mat., 1953, 3, 8—23 (исп.)

Относительно предыдущей части и ссылок на более ранние части см. Math. Rev., 1953, 14, 28.

Из Math. Rev., 1953, 14, № 8, 735.

2550. **Левосторонний дистрибутивный закон умножения трансфинитных чисел. Закон** (Left side distributive law of the multiplication of transfinite numbers. Zakon Elias), Riveon Lematematika, 1953, 6, 28—32 (иврит; резюме англ.)

Доказывается следующая теорема: для данных порядковых чисел α, β, γ со свойством $\alpha+\beta\neq\beta\neq 0\neq\gamma$ существует единственное неотрицательное целое число c такое, что $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta c$.

Эйленберг (S. Eilenberg)

Из Math. Rev., 1953, 14, № 8, 733.

2551 РЕЦ. **Трансфинитная нумерация. II. Арифметизация трансфинитов.** Данжуа (L'énumération transfinie. II. L'arithmétisation du transfini. Denjoy Arnaud, pagination continue pp. 207 à 614, Gauthier-Villars, Paris, 1952, 3000 fr.) [Рецензия: Рюссо (Russo F.), Rev. questions scient., 1953, **14**, 446—447 (франц.)]

2552 Д. **Интеграл с малым размахом.** Ходаков В. А. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., МГУ, М., 1953

2553 Д. **Об одном новом понятии интеграла.** Рошенко Н. С. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Харьковский гос. ун-т, Харьков, 1953

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

2554. **Аппроксимативные свойства ортогональных разложений.** Надь (Approximation properties of orthogonal expansions. Sz.-Nagy Béla), Acta scient. math., 1953, **15**, № 1, 31—37 (англ.)

Пусть $C_{r\alpha}(r=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ 0<\alpha\leqslant 1)$ означает класс функций $f(x)$, имеющих на $[0,\ 1]$ непрерывные производные до r-го порядка включительно, причем $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f^{(r)}(x_1)-f^{(r)}(x_2)|\leqslant N_{r\alpha}(f)\,|x_1-x_2|^{\alpha}.$$

Существует положительная константа $\gamma_{r\alpha}$, зависящая только от r и α и такая, что для любой ортонормированной на $[0,1]$ последовательности функций $\{\varphi_k(x)\}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ и всякой системы чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots;\ k=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n)$, для которой $\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k^{(n)}|^2\leqslant n$, величина

$$\rho_n(r,\ \alpha,\ p)=\sup_{f\in C_{r\alpha}}\frac{\|f-\sigma_n(f;\ \lambda)\|_{L_p}}{N_{r\alpha}(f)}\quad(1\leqslant p\leqslant\infty),$$

где

$$\sigma_n(f;\ \lambda)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\varphi_k(x)\int_0^1 f(t)\,\varphi_k(t)\,dt,$$

удовлетворяет неравенству

$$\rho_n(r,\ \alpha,\ p)\geqslant\frac{\gamma_{r\alpha}}{n^{r+\alpha}}.\qquad(1)$$

При любых r и α $(r=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ 0<\alpha\leqslant 1)$ существует система значений $\lambda_k^{(n)}$, для которой в классе всех ортонормированных последовательностей $\{\varphi_k(x)\}$ оценку (1) в смысле порядка нельзя улучшить. Для обычных ортогональных разложений, т. е. когда $\lambda_k^{(n)}\equiv 1$, в случае $r=0$ точность оценки (1) обнаруживается при рассмотрении ортонормированной последовательности функций, введенной Хааром (Haar Cf. A., Zur Theorie der orthogonalen Functionensysteme, Inauguraldissertation, Göttingen, 1909, 40—43). Для других r вопрос о точности неравенства (1) остается открытым.

В случае $p=2$, когда $r=0$, $\alpha=1$, $\lambda_k^{(n)}\equiv 1$, этот результат был ранее установлен Рудиным (Rudin Walter, Duke Math. J., 1952, **19**, 1—4), получившим также соответствующую оценку для класса функций, имеющих ограниченную вариацию.

Автор рассматривает также класс C_r $(r=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ всех функций, имеющих на $[0,\ 1]$ непрерывные производные до r-го порядка включительно, и для любой ортонормированной на $[0,\ 1]$ последовательности $\{\varphi_k(x)\}$ дает неравенство

$$\rho_n(r,\ p)=\sup_{f\in C_r}\frac{\|f-\sigma_n(f;\ \lambda)\|_{L_p}}{\omega(f^{(r)};\ 1/n)}\geqslant\frac{\delta_r}{n^r}\quad(1\leqslant p\leqslant\infty),$$

где

$$\omega(f^{(r)};\ 1/n)=\sup_{|x_1-x_2|\leqslant 1/n}|f^{(r)}(x_1)-f^{(r)}(x_2)|,$$

а δ_r — константа, зависящая только от r. *А. Ф. Тиман*

См. также: 2468, 2473, 2477, 2491, 2493, 2537, 2538, 2541, 2574, 2582, 2591, 2624, 2630, 2631 Д, 2643, 2721

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2555. **Дидактическое замечание к введению комплексных чисел.** Бунгорд (En didaktisk bemaerkning om indførelsen af de komplekse tal. Bundgaard Svend), Nord. mat. tidskr., 1953, **1**, № 1, 16—24 (дат.)

2556. **Степенные ряды однолистных функций на границе круга сходимости.** Гайер (Schlichte Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Gaier Dieter), Math. Z., 1953, **58**, № 4, 456—458 (нем.)

Дополняя результат Херцога, Эрдёша и Пираняна, а также свой собственный (РЖМат, 1953, 189), автор доказывает, что существует регулярная и однолистная в единичном круге функция, степенной ряд которой сходится в каждой точке единичной окружности, но ни на одной дуге не сходится равномерно. *М. А. Евграфов*

2557. **Комплексные теоремы тауберова типа для степенных рядов.** Гайер (Complex Tauberian theorems for power series. Gaier Dieter), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 1, 48—68 (англ.)

Понимая под комплексными теоремами тауберова типа теоремы, в которых, помимо условий на коэффициенты, накладываются условия на поведение функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

в окрестности точки $z=1$ (утверждение состоит в получении равенства $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$ из условия $\lim_{x\to1-0}f(x)=s$ и некоторых дополнительных), автор получает обобщение теорем Фату и М. Рисса. Кроме того, получены аналогичные результаты о связи методов суммирования.

Наиболее характерные из доказанных теорем таковы:

1. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

регулярна и ограничена в области S_1: $|z-1|<\delta$, $|\arg(z-1)|>\theta$, $\delta>0$, $\theta<\pi/2$ и $a_n\to0$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$, если $f(z)\to s$ при $z\to1-0$.

2. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

регулярна и ограничена в области $|z-1|<\delta$, $|z|<1+c\varphi^2$, $\varphi=\arg z$, $\delta>0$, $c>0$, и $a_n\to0$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируем одним из методов Эйлера, Бореля или Мейер — Кёнига.

3. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

регулярна и ограничена в области S_1, а последовательность $\{a_n\}$ суммируема к нулю методом Бореля. Тогда из условия $\lim_{x\to1-0}f(x)=s$ следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируем методом Бореля к сумме s.

М. А. Евграфов

2558. Представление функций при помощи матриц. Приложение к многочленам Фабера. Яботинский (Representation of functions by matrices. Application to Faber polynomials. Jabotinsky Eri), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 546—553 (англ.)

Пусть Ω — множество функций $f(z)$, аналитических в некотором круге,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nz^n,$$

пусть $\{f_{m,n}\}$ — коэффициенты разложения функции $[f(z)]^m$; таким образом каждой функции $f(z)$ ставится в соответствие матрица $f=\|f_{m,n}\|$.

Теорема 1. Если $f(z)\in\Omega$ и $g(z)\in\Omega$, то для $k(z)=f[g(z)]\in\Omega$

$$k_{m,n}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}f_{m,p}g_{p,n},$$

т. е. $k=f\times g$.

Теорема 2. Пусть $f(z)\in\Omega$ и $\varphi(z)$ — обратная функция. Тогда $\varphi(z)\in\Omega$ и при $n\neq0$

$$\varphi_{m,n}=\frac{m}{n}f_{-n,-m},$$

а при $n=0$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varphi_{m,0}z^{-m-1}=\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Доказывается также ряд предложений о многочленах Фабера для $f(z)\in\Omega$. *П. К. Суетин*

2559. Об одной теореме М. В. Келдыша. Тамадян А. П., Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. н., 1953, 6, № 2, 5—11 (русск.; резюме арм.)

Пусть $h(z)>0$ — ограниченная функция в произвольной конечной односвязной области D, расположенной в плоскости z. Отнесем к классу $H_2(h, D)$ все аналитические в D функции $f(z)$, для которых

$$\iint_D h(z)|f(z)|^2\,dx\,dy<+\infty.$$

Доказывается следующая теорема. Если: 1) при всех $h[z(w)]$ (где $z=z(w)$ конформно отображает круг $|w|<1$ на D) система полиномов полна в единичном круге,

$$2)\ \lim_{d\to0}[d(z)]^2\ln\ln\frac{1}{h(z)}>0,$$

где $d(z)$ — расстояние точки z до границы D, то система полиномов полна в D в классе функций $H_2(h, D)$.

Эта теорема несколько усиливает теорему М. В. Келдыша (Мат. сб., 1945, 16 (58), № 1,1—20), где вместо условия 2) вводилось более жесткое требование

$$2')\ \lim_{d\to0}\frac{\ln\ln\ln\dfrac{1}{h(z)}}{\ln\dfrac{1}{d(z)}}>2.$$

Метод доказательства в настоящей работе отличается от метода М. В. Келдыша. *М. М. Джрбашян*

2560. Свойства выпуклости интегральных средних аналитических функций. Шниад (Convexity properties of integral means of analytic functions. Shniad H.), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 3, 657—666 (англ.)

Пусть $f=f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z|<R$. Для любого $t>0$ средним значением функции f порядка t называется выражение

$$\mathfrak{M}_t(r; f)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\vartheta})|^t\,d\vartheta\right]^{1/t}\quad(0\leqslant r<R).$$

Известно, что $\mathfrak{M}_t(r; f)$ есть выпуклая относительно r функция, если $t=2/k$ ($k=1, 2, 3, \ldots$). В рефе-

рируемой статье элементарными средствами доказываются следующие утверждения:

1) При $t = 4$ $\mathfrak{M}_t(r; f)$ всегда выпукла.

2) При $t \geqslant 5{,}66$ существуют аналитические в $|z| < 1$ функции, для которых $\mathfrak{M}_t(r; f)$ не выпукла.

М. М. Джрбашян

2561. Об угловых дифференциальных коэффициентах. II. Набедзима (角微係數について. II. 鍋島一郎), 數學(Сугаку), 1953, 4, № 4, 36—38 (япон.)

Статья является новой редакцией работы автора «О нулях, ограниченных регулярных функций в единичном круге, и угловых дифференциальных коэффициентах» (Сугаку, 1949, 1, № 1, 307—308).

2562. О конечных суммах ограниченных однолистных функций. Шлионский Г., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 4, 707—709

Доказана теорема:

Пусть S_M $(M \geqslant 3)$ — класс функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, удовлетворяющих условию $|f(z)| < M$; тогда конечные суммы

$$\sigma_n(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

однолистны в круге $|z| < \dfrac{M}{4(M-1)} = r_M$, причем постоянная величина r_M не может быть увеличена (для данного класса S_M).

При $M \to \infty$ из теоремы получается известный результат Сегё (Szegö G., Math. Ann., 1928, 100, 188—211). *Г. В. Корицкий*

2563. О производной однолистной функции. Ловатер, Пиранян (On the derivative of a univalent function Lohwater A. J., Piranian George), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 591—594 (англ.)

Доказана следующая теорема:

Существуют функция $f(z)$, аналитическая и однолистная в круге $|z| < 1$, и множество E точек окружности $|z| = 1$ положительной логарифмической емкости в смысле Фростмана (Frostman O., Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, 1935, 3, 1—115) такие, что

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^{1/2} |f'(re^{i\theta})| = \infty,$$

когда точка $e^{i\theta}$ принадлежит множеству E.

Эта теорема является дополнением к одному результату Зейделя и Уолша (Seidel W., Walsh J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 52, 128—216), который можно сформулировать следующим образом: если $f(z)$ — аналитическая и однолистная в круге $|z| < 1$ функция, то

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^{1/2} |f'(re^{i\theta})| = 0$$

для всех точек $e^{i\theta}$ окружности $|z| = 1$, кроме, быть может, точек множества, линейная мера которого равна нулю. *Г. В. Корицкий*

2564. Об интегралах некоторого дифференциального уравнения, отображающих полуплоскость на область, граница которой состоит из отрезков прямых. Попова Н. В., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 4, 727—728

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - \lambda_i(t)} \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} = 0, \qquad (1)$$

где $\lambda_i(t)$ — действительные непрерывно дифференцируемые функции действительного переменного t, z — комплексное переменное.

Автор исследует условия, при которых решение уравнения (1) отображает полуплоскость на области, границы которых состоят из отрезков прямых. Им установлены следующие факты.

1) Если $a_k(t)$, $k = n+1, \ldots, m$, и $\lambda_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_k - \lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_p}{dt} = A_p \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\alpha_k - 1}{\lambda_p - a_k} + A_p \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_p - \lambda_i} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n} \frac{A_i}{\lambda_p - \lambda_i}, \qquad (2)$$

то функция

$$w = c \int_0^z \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i(t)) \prod_{k=n+1}^{m} (z - a_k(t))^{\alpha_k - 1} dz \qquad (3)$$

является решением уравнения (1).

2) Решение уравнения (1) (при определенных условиях, наложенных на коэффициенты A_i; в статье, ввиду ее краткости, это не отмечено) отображает полуплоскость на семейство вложенных друг в друга областей. В частности, если при $t = t_0$ функция (3) отображает полуплоскость на область, граница которой состоит из отрезков прямых, то при $t > t_0$ эта функция отображает полуплоскость на область того же вида, получаемую из начальной области проведением прямолинейных удлиняющихся с возрастанием t разрезов.

Аналогичное исследование для уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + z \frac{\mu(t) + z}{\mu(t) - z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{(уравнение Лёвнера)}$$

в случае отображения круга на полигональные области было проведено референтом (Куфарев П. П., Уч. зап. Томского гос. ун-та, 1948, № 8, 61—72).

Следует отметить, что на основании данной работы может быть предложен метод численного определения параметров функции, отображающей полуплоскость на полигональную область (ср. Куфарев П. П., Докл. АН СССР, 1947, 57, № 6, 535—537). *П. П. Куфарев*

2565. Обтекание составного профиля различной проницаемости. Шульгин Д. Ф., Прикл. математика и механика, 1953, 17, № 3, 285—292

Дается применение формул С. А. Чаплыгина для комплексного потенциала обтекания составных профилей (Чаплыгин С. А., Собр. соч., 2, Гостехиздат, 1948) к обтеканию составных профилей различной проницаемости. Задача об обтекании дозвуковым потоком пластинки, составленной из проницаемых и непроницаемых участков, при помощи методов теории тонкого крыла сводится к сингулярному интегральному уравнению, решение которого находится в явном виде. В случае

отсутствия непроницаемых участков получаются результаты, установленные ранее Х. А. Рахматулиным (Вестн. МГУ, 1950, № 3, 41—55).

Г. Н. Положий

2566. К проблеме плоской и осесимметричной свободной границы. Серрин (On plane and axially symmetric free boundary problems. Serrin James), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, 2, № 3, 563—575 (англ.)

Пусть ось x есть ось симметрии при обтекании препятствия с отрывом струй или при истечении жидкости из канала в случае плоского или осесимметричного потока. При обтекании препятствия граничная линия тока в верхней полуплоскости состоит из отрицательной оси x, стенок препятствия и свободной линии тока, в случае канала она состоит из верхней стенки канала и свободной границы струи. Пусть $\psi = 0$ есть уравнение указанной граничной линии тока S, Σ — часть ее, совпадающая со свободной границей, T — часть S, отличная от Σ.

При помощи метода М. А. Лаврентьева в теории струй (Мат. сб., 1938, 3 (46), 391—459) в работе доказывается следующая теорема: всякая бесконечная прямая, не имеющая общих точек с T, может пересечь свободную границу Σ самое большее в одной точке.

Так же решен вопрос о единственности потока, заключенного в бесконечном прямолинейном канале или в бесконечной круглой трубе, обтекающего препятствие, звездообразное относительно точки, лежащей на оси симметрии. Показано, что при заданном расходе жидкости не может существовать более одного симметрического потока с бесконечной полостью, обтекающего данное звездообразное препятствие.

В порядке обобщения результатов М. А. Лаврентьева, приведенных в цитированной выше работе, исследуется вопрос о форме препятствий, соответствующих наименьшему давлению, и вопрос о зависимости свободной границы от формы препятствия или стенок канала.

Доказывается теорема:

Пусть линии T_1 и T_2 соответствуют потоку при обтекании с отрывом струй двух различных препятствий или при истечении из двух различных каналов. Пусть T_1 и T_2 имеют общую концевую точку A, линия T_1 — звездообразная относительно точки σ, лежащей на вещественной оси, t — прямая линия, соединяющая точки A и σ, T_1 и T_2 лежат по одну сторону от t. Тогда, если T_2 лежит выше T_1, то свободная линия тока Σ_2 будет ниже свободной линии тока Σ_1 (соответствующей T_1); если T_1 выше T_2, то Σ_1 будет ниже Σ_2.

Г. Н. Положий

2567. Существенно допустимые последовательности. Бак (Essentially admissible sequences. Buck R. Creighton), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 3, 387—390 (англ.)

Пусть X — множество последовательностей $\alpha = \{a_n\}$ (a_n — комплексные числа) таких, что

$$\| \alpha \| = \sup_n | a_n |^{1/(n+1)} < \infty.$$

Последовательность $\alpha \in X$ называется существенно допустимой, если существует целая функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям: $|f(z)| < Me^{a|z|}$ ($a < \infty$), $|f(iy)| < Me^{c|y|}$ ($c < \pi$) и при достаточно больших n $f(n) = a_n$.

Рассматривается множество A всех существенно допустимых последовательностей. Понимая под расстоянием между последовательностями α и β выражение $\| \alpha - \beta \|$, автор показывает, что A в X является неплотным множеством первой категории. Эти результаты имеют связь с ранее опубликованными результатами того же автора (РЖМат, 1953, 208).

А. Ф. Леонтьев

2568. Асимптотические значения некоторых мероморфных функций в единичном круге. Ловатер (Les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes dans le cercle-unité. Lohwater Arthur-J.), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 1, 16—18 (франц.)

Устанавливается теорема:

Пусть $w = f(z)$ — такая мероморфная в круге $|z| < 1$ функция с ограниченной характеристикой, что

$$\lim_{r \to 1} | f(re^{t\theta}) | = 1$$

почти всюду на дуге A окружности $|z| = 1$. Тогда, если P — особая точка $f(z)$, $P \in A$, и ζ, $|\zeta| = 1$, — какое-либо исключительное значение $f(z)$ в $|z| < 1$ (т. е. $f(z) \neq \zeta$ при $|z| < 1$), то ζ будет являться асимптотическим значением $f(z)$ в любой окрестности P, т. е. существует кривая $\gamma \subset |z| < 1$, конец которой q принадлежит заданной окрестности P и на которой $\lim_{z \to q} f(z) = \zeta$.

Г. Ц. Тумаркин

2569. Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и асимптотические периоды целых функций. Гельфонд (Linear differential equations of infinite order with constant coefficients and asymptotic periods of entire functions. Gel'fond A. O.), Amer. Math. Soc. Translation, 1953, № 84, 31 pp. (англ.)

Перевод из Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1951, 38, 42—67.

Из Math. Rev., 1953, 14, № 8, 739.

2570. Замечание о дзета-функциях. Кобер (A remark on zeta functions. Kober H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 588—590 (англ.)

Доказывается, что для $\operatorname{Re} w \geqslant 0$, $w \neq 0$, справедливо функциональное уравнение

$$F_s(w) + F_{1-s}(1/w) = \xi(s), \qquad (1)$$

где

$$F_s(w) = \int_0^\infty (x + w)^{s/2-1} \omega(x+w)\, dx - w^{1/2(s-1)}(1-s)^{-1},$$

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi x n^2),$$

$\xi(s)$ — функция Римана.

Уравнение (1) позволяет получить новые эквиваленты гипотезы Римана о нулях $\zeta(s)$.

Получены также функциональные уравнения для обобщенных дзета-функций:

$$\zeta(s, a, b) = \sum_{n>-a} |n+a|^{-s} \exp 2\pi i n b;$$

$$Z_1(s, a, b) = \sum_{n=-\infty;\, n+a\neq 0}^{+\infty} |n+a|^{-s} \exp 2\pi i n b$$

$$Z_2(s, a, b) = \sum_{n=-\infty,\, n+a\neq 0}^{+\infty} (n+a)|n+a|^{-s-1} \exp 2\pi i n b,$$

где a и b — любые действительные числа.

Н. Г. Чудаков

2571 К. Униформизация. Неванлинна (Uniformisierung. Nevanlinna R.), 391 S., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953 (нем.)

Книга Неванлинна дает систематическое и полное изложение проблемы униформизации, а также современной теории открытых римановых поверхностей, получившей значительное развитие за последнее время. Книга состоит из десяти глав.

Первая глава посвящена рассмотрению алгебраических функций и имеет целью создание наглядной базы для последующего изучения абстрактных римановых поверхностей. Во второй главе изучается общее понятие римановой поверхности. Здесь же излагается все необходимое для дальнейшего из топологии поверхностей. В третьей главе доказывается ряд основных теорем об аналитических функциях и дифференциалах, рассматриваемых на данной римановой поверхности. Четвертая глава посвящена теоремам существования гармонических функций, удовлетворяющих данным граничным условиям или обладающих данными особенностями. Изложение ведется с той степенью общности, которая необходима для последующего решения проблемы униформизации и опирается на усиленный автором альтернирующий метод Шварца. В пятой главе изучаются замкнутые римановы поверхности. Рассматриваются топологическая классификация замкнутых римановых поверхностей, дифференциалы 1-го, 2-го, 3-го родов (включая доказательство теорем существования), теорема Абеля и интегралы алгебраических функций. Изложение ведется в форме особенно пригодной для последующего построения теории абелевых интегралов на открытых римановых поверхностях. В шестой главе доказывается, что всякую открытую односвязную риманову поверхность можно конформно отобразить либо на единичный круг, либо на всю конечную плоскость (Риман). В первом случае на поверхности существует функция Грина, которая подробно изучается, строится и используется для получения нужного отображения; во втором случае функции Грина не существует и для получения отображения на всю конечную плоскость строится нормальный потенциал третьего рода. В седьмой главе изучаются группы линейных преобразований, особенно подробно — их фундаментальные области, как это необходимо для решения проблемы униформизации. В главе восьмой дается общее решение проблемы униформизации для произвольной римановой поверхности. В главе девятой изучаются открытые римановы поверхности, подобные однолистным. Подробно рассматриваются конформные отображения таких поверхностей на плоскость с параллельными разрезами и ряд связанных с ними экстремальных задач. Глава десятая, последняя, посвящена современной теории открытых римановых поверхностей. Рассматриваются функция Грина, граничные задачи теории потенциала, теория квадратично интегрируемых дифференциалов и вопросы классификации римановых поверхностей.

Л. И. Волковыский

2572 К. Однозначные аналитические функции. Неванлинна (Eindeutige analytische Funktionen. Nevanlinna Rolf (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 46), 2. Aufl., 390 S., 24 Abb., Springer, Berlin, 1953, 49.50 DM), Neue Bücher, 1953, Juni (библ.)

2573 РЕЖ. Математические основы высшей геодезии и картографии. Том I. Земной сфероид и его конформные отображения. Кёниг, Вейзе (Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie. I. Bd. Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen. König R., Weise K. H., 522 S., 109 z. T. farb. Abb., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1951, Springer-Verlag, 49.60 DM) [Рецензия: Хунгер (Hunger F.), Petermann's geogr. Mitt., 1953, 97, № 1, 63 (нем.)]

См. также: 2468, 2470, 2471, 2473, 2474, 2477, 2574, 2580 К, 2582, 2614

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2574. О дифференциальных уравнениях бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. I. Карлесон (On infinite differential equations with constant coefficients. I. Carleson Lennart), Math. scand., 1953, 1, № 1, 31—38 (англ.)

Рассматривается уравнение вида

$$Ly = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{(n)}(x) = 0, \qquad (1)$$

где

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = F(z),\ F(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right)^{\mu_\nu},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu_\nu}{|\lambda_\nu|} < \infty,$$

а относительно функции $y(x)$ предполагается, что она определена на отрезке $[a, b]$, бесконечно дифференцируема и ряд (1) равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Аналогично тому, как это делал А. О. Гельфонд (Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1951

38, 42—67) для аналитических решений, автор ставит в соответствие каждому решению формальный ряд, расположенный по фундаментальным решениям вида $x^k e^{\lambda x}$.

Доказывается:

1. Если все коэффициенты формального ряда равны нулю, то $y(x) \equiv 0$.

2. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы любое решение уравнения (1), определенное на некотором интервале, содержащем сегмент $[a, b]$, было регулярно на $[a, b]$, является условие

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right| > 0,\ \lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu.$$

М. А. Евграфов

2575. Об условиях асимптотической устойчивости нулевого решения системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений. Горбунов А. Д., Вестн. МГУ, 1953, № 9, 49—55

Пусть задана система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в нормальной форме

$$\frac{dx}{dt} = L(t)\,x, \qquad (1)$$

где $L(t)$ — матрица, составленная из функций $l_{ik}(t)$, непрерывных при $-\infty < t < \infty$. Известно, что теорема А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости, вообще говоря, необратима даже для системы указанного выше типа (Малкин И. Г., Теория устойчивости, Гостехиздат, 1952, 309—317). Автор статьи, немного ослабляя ограничения, налагаемые на производную функции Ляпунова, получает необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Квадратичная форма

$$g(t, x) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}(t)\,x_i x_k$$

называется существенно отрицательной в промежутке (a, b), если она определенно отрицательна при всяком t_0 из интервала $a < t_0 < b$. Пусть

$$G(t, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t)\,x_i x_k$$

— квадратичная форма такая, что

$$\frac{dG(t, x)}{dt} = g(t, x),$$

где вектор-функция $x(t)$ является решением системы (1). Пусть

$$N_G(t) = \max_{G(t, x)=1} g(t, x).$$

Доказана следующая теорема: чтобы нулевое решение системы (1) было асимптотически устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая определенно положительная квадратичная форма $G(t, x)$ с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, что

$$g(t, x) = \frac{dG(t, x)}{dt}$$

является существенно отрицательной на полуприямой $t_0 \leqslant t < +\infty$, причем интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} N_G(t)\,dt$$

расходится.

В формулировке теоремы (стр. 51) допущена ошибка, вместо $-\infty < t < \infty$ следует читать $t_0 \leqslant t < +\infty$. *Е. А. Барбашин*

2576. Асимптотические формулы для форм равновесия стержня при продольном изгибе. Кондратьев А. С., Сб. науч. тр. Куйбышевского индустр. ин-та, 1953, № 4, 3-12

Автор применяет известные асимптотические формулы задачи Штурма-Лиувилля к изучению форм равновесия стержня при продольном изгибе.

Доказана также следующая теорема:

Решение дифференциального уравнения

$$u'' + \lambda u = f(t)\,u + f_1(\lambda)\,\varphi(t) + f_2(\lambda)$$

в интервале $(0, l)$ при условиях

$$\int_0^l u^2(t)\,dt = 1, \qquad u(0) = u'(0) = 0$$

ограничено при $\lambda \to +\infty$, если только функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны, а $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ таковы, что при $\lambda \to +\infty$

$$f_i(\lambda) = O\left(\sqrt{\lambda}\right) \qquad (i = 1,2).$$

Б. М. Левитан

2577. Циклоидальное движение электронов. Pauch (Cycloidal motion of electrons. Rauch S. E.), Math. Mag., 1953, 26, № 5, 255—262 (англ.)

Интегрирование уравнений движения электрона в однородном электромагнитном поле ($E_y = 0$, $H_x = H_y = 0$, $H_z = H$):

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = eE_z, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{He}{c}\frac{dx}{dt},$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = eE_x + \frac{He}{c}\frac{dy}{dt},$$

приводит к известному результату, что траекторией электрона в данном случае является пространственная кривая

$$z = z_0 + z_0' t + \frac{eE_z}{2m}t^2,$$

$$x = x_0 + \frac{1}{\gamma}\sqrt{x_0'^2 + (y_0' + U)^2}\cos(\gamma t + \theta_0),$$

$$y = y_0 + \frac{1}{\gamma}\sqrt{x_0'^2 + (y_0' + U)^2}\sin(\gamma t + \theta_0) - Ut,$$

где

$$x_0 = x|_{t=0}; \quad y_0 = y|_{t=0}; \quad z_0 = z|_{t=0};$$

$$x_0' = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}; \quad y_0' = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}; \quad z_0' = \frac{dz}{dt}\Big|_{t=0};$$

$$\gamma = \frac{eH}{mc};\ U = \frac{cE_x}{H};\ \theta_0 = \operatorname{arctg}\frac{x_0'}{y_0' + U},$$

проектирующаяся на плоскость x, y в циклоиду. Дается краткое исследование циклоиды и приводятся два физических примера. *В. И. Левин*

2578. Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малыми параметрами при высших производных. Градштейн (Linear equations with variable coefficients and small parameters in the highest derivatives. Gradštejn I. S.), Amer. Math. Soc. Translation № 82, 1953, 32 pp. (англ.)

Перевод из Мат. сб., 1950, 27 (69), 47—68.

Из Math. Rev., 1953, 14, № 7, 645.

2579 К. Мемуары по теории систем линейных дифференциальных уравнений. Лаппо-Данилевский (Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. Lappo-Danilevsky J. A., pp. 14+254+ +208+204, Chelsea Publishing Co., New York, 1953, 10. 00 doll.), Math. scand., 1953, 1, № 1, 5 (библ.)

2580 К. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений в теоретико-функциональном изложении. Бибербах (Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt. Bieberbach Ludwig. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 66, S. IX+338, Springer-Verlag, Berlin, 1953, 39.60 DM), Math. Z., 1953, 59, № 1 (библ.).

2581 Д. Об устойчивости движения при любых начальных возмущениях. Красовский Н. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Уральский политехн. ин-т, Свердловск, 1953

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

2582. О некоторых свойствах решений эллиптической системы линейных уравнений с частными производными. Дубовицкий А. Я., Уч. зап. Вологодского гос. пед. ин-та, 1953, 11, 159—178

Приводятся новые доказательства некоторых известных свойств эллиптической системы

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = a(x,y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -b(x,y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \qquad (1)$$

где $0 < m \leqslant a, b \leqslant M$. Центральный пункт статьи — доказательство для решений этой системы теоремы, аналогичной теореме Пикара (в несколько более слабой формулировке): две функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, дважды дифференцируемые и удовлетворяющие на всей плоскости xy уравнению (1), принимают все пары значений u, v), исключая, может быть, множество меры нуль. *Е. М. Ландис*

2583. Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения. Эйдельман С. Д., Мат. сб., 1953, 33(75), № 2, 359—382

Рассматриваются p-параболические системы, выделенные и исследованные И. Г. Петровским. Автор показывает, что для фундаментальных матриц (матриц Грина) этих систем справедливы те же оценки убывания при

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2} \to \infty$$

и те же методы их получения, что и в случае одного p-параболического уравнения, данные в работе референта (Мат, сб., 1950. 27(69), 175—184).

Из этих оценок приемом, данным в той же работе референта, устанавливается теорема единственности для указанных выше систем в широком классе неограниченно растущих функций. Далее указывается, что теорему существования решений этих систем при неограниченно растущих начальных данных легко доказать, исходя из работы Петровского и полученных автором оценок функции Грина. Наконец, устанавливаются теоремы Лиувилля и Гарнака для решений p-параболических систем. *О. А. Ладыженская*

2584. Обобщение метода разделения переменных. Мартин (A generalization of the method of separation of variables. Martin M. H.), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, 2, № 2, 315—327 (англ.)

Показывается, что для того, чтобы множества точек

$$M: x_\alpha = x_\alpha(u_1, \ldots, u_r), \quad N: y_\alpha = y_\alpha(v_1, \ldots, v_s)$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

где x_α и y_α — функции независимых переменных $u_1, \ldots, u_r$ и соответственно $v_1, \ldots, v_s$, удовлетворяли тождеству

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha(u_1, \ldots, u_r) y_\alpha(v_1, \ldots, v_s) = 0, \qquad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы $M \subset S_p$, $N \subset T_q$, где S_p и T_q — ортогональные линейные подпространства соответственно p и q измерений при условии $p + q = n$, $p = 0, 1, \ldots, n$. Линейные подпространства S_p и T_q, определенные равенствами

$$S_p: \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, q,$$

$$T_q: \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} y_\alpha = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad (p + q = n),$$

где матрица $A = \| a_{i\alpha} \|$ имеет ранг p, а матрица $B = \| b_{k\alpha} \|$ имеет ранг q, будут ортогональными в том и только в том случае, если

$$A_{i_1 \ldots i_p} / B_{k_1 \ldots k_q} = \text{const},$$

где $A_{i_1 \ldots i_p}$ — минор матрицы A, образованный столбцами $i_1, \ldots, i_p$, $B_{k_1 \ldots k_q}$ — минор матрицы B, образованный столбцами $k_1, \ldots, k_q$, причем $i_1 \ldots i_p$, $k_1 \ldots k_q$ получаются как перестановки $1, \ldots, n$.

На основе этого показывается, что всякое решение уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$, имеющее вид

$$u=u(\varphi), \qquad \varphi=X(x)+Y(y),$$

где $u(\varphi)$, $X(x)$, $Y(y)$ — вещественные функции своих аргументов, получается при $X(x)$ и $Y(y)$, являющихся интегралами эллиптических функций (и их вырождений), определенных соответственно равенствами

$$x=\int\frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi^2)}}, \qquad y=\int\frac{d\eta}{\sqrt{Q(\eta^2)}},$$

$$P(\xi^2)=a+2b\xi^2+c\xi^4, \quad Q(\eta^2)=a-2b\eta^2+c\eta^4,$$

где a, b, c — произвольные вещественные постоянные. Функция $u(\varphi)$ должна иметь вид:

$$e^{-\sqrt{c}\,\varphi};\ \ln\varphi;\ \ln\varphi;\ \ln\operatorname{tg}\frac{\sqrt{-c}\varphi}{2};\ \operatorname{arc\,tg}\,e^{\sqrt{c}\,\varphi};$$

$$\operatorname{arc\,tgh}\,e^{\sqrt{c}\,\varphi};$$

соответственно в случаях: $c>0$, $\Delta=0$; $c=0$, $\Delta=0$; $c=0$, $\Delta>0$; $c<0$, $\Delta>0$; $c>0$, $\Delta>0$; $c>0$, $\Delta<0$, где $\Delta=b^2-ac$.

Приведенные результаты, относящиеся к тождеству (1), в некоторых частных случаях, например при $n=5$, использовались в методе разделения переменных ранее (Birkhoff G., Hidrodynamics, Princeton University Press, 1950, 137—139).

Г. Н. Положий

2585. Диэлектрический цилиндр. Пауэр (A dielectric cylinder. Power G.), Math. Gaz., 1953, 37, № 321, 220 (англ.)

Исследуется изменение двумерного электростатического поля при внесении в него цилиндра радиуса a с однородной диэлектрической проницаемостью k. Если $f(z)$ — комплексный потенциал поля до внесения цилиндра и внутри цилиндра нет особенностей, то

$$\Omega_1=\frac{2}{1+k}f(z)$$

и

$$\Omega_0=f(z)+\frac{1-k}{1+k}\overline{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

суть комплексные потенциалы поля внутри и вне цилиндра соответственно. Решается также задача для случаев наличия особенности внутри цилиндра и логарифмического поведения $f(z)$ на бесконечности.

Ю. Н. Днестровский

2586. Сильный принцип максимума для параболических уравнений. Ниренберг (A strong maximum principle for parabolic equations. Nirenberg Louis), Communs Pure and Appl. Math., 1953, 6, № 2, 167—177 (англ.)

Пусть u — дважды непрерывно дифференцируемая функция $n+m$ переменных $x_1,\ldots,x_n$, $t_1,\ldots,t_m$, заданная в $(n+m)$-мерной области T.

Рассмотрим оператор

$$L(u)=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{m}b_{\alpha\beta}u_{t_\alpha t_\beta}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i}+\sum_{\alpha=1}^{m}b_\alpha u_{t_\alpha},$$

где квадратичная форма $\sum_{i,\,j}a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ положительно определена, а квадратичная форма $\sum_{\alpha,\,\beta}b_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$ положительно полуопределена. Коэффициенты предполагаются непрерывными в T. Обозначим через $C(P)$ компоненту точки P пересечения области T с гиперплоскостью $t_i=\text{const}$ $(i=1,2,\ldots,m)$.

Доказываются теоремы:

Теорема 1. Если для функции u в T имеет место неравенство $L(u)\geqslant 0$ и в некоторой внутренней точке P_0 функция u достигает максимума, то $u\equiv u(P_0)$ на $C(P_0)$.

Теорема 2. Пусть u удовлетворяет на T уравнению $L(u)+au=0$, где a — неотрицательная непрерывная функция. Если u имеет положительный максимум (отрицательный минимум) в некоторой точке $P_0\in T$, то $u\equiv u(P_0)$ на $C(P_0)$.

Теорема 3. Если u — неположительное (неотрицательное) решение уравнения $L(u)+au=0$, исчезающее в точке P_0, то $u\equiv 0$ на $C(P_0)$.

Пусть теперь T есть область пространства $x_1,\ldots,x_n$, t и

$$L'(u)=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i}+bu_t, \qquad b\neq 0,$$

есть оператор, эллиптический по переменным x (коэффициенты попрежнему непрерывны).

Обозначим через $S(P)$ совокупность точек $Q\in T$, соединимых с точкой P внутри T простой дугой, вдоль которой координата t не убывает (считая от Q к P). Доказываются теоремы:

Теорема 4. Если u определена в T, $L'(u)\geqslant 0$ и u достигает максимума в точке $P_0\in T$, то $u\equiv u(P_0)$ на $S(P_0)$.

Теорема 5. Пусть u — решение уравнения $L'(u)+au=0$, $a\leqslant 0$, и a непрерывна в T. Если в некоторой точке $P_0\in T$ достигается положительный максимум (отрицательный минимум) функции u на множестве $S(P_0)$, то $u\equiv u(P_0)$ на $S(P_0)$.

Теорема 6. Если u исчезает в точке P_0 и $u\leqslant 0$ $(u\geqslant 0)$ на $S(P_0)$, то $u\equiv 0$ на $S(P_0)$.

Е. М. Ландис

2587. Распределения на многообразиях. Фурье-Брюа (Les distributions sur les multiplicités. Fourès-Bruhat Yvonne), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 23, 2201—2202 (франц.)

Дается определение распределения на бесконечно дифференцируемом многообразии X. Такое распределение, обозначаемое автором через $T_{[x]}$, зависит от выбора локальной системы координат $[x]$ и является непрерывным линейным функционалом, заданным на многообразии бесконечно дифференцируемых на X функций. Приводятся правила перехода к другой локальной системе координат $[y]$, умножения на функцию и дифференцирования $T_{[x]}$ по x^i. Эти понятия используются для нахождения фундаментального решения $\sigma_{[x^\alpha]}$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\sigma_{[x^\alpha]}}{(\partial x^4)^2}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\sigma_{[x^\alpha]}}{(\partial x^i)^2}=\delta \qquad (\alpha=1,2,3,4).$$

М. И. Вишик

2588. Прохождение электромагнитного поля через двумерную решетчатую среду. Беннетт (The electromagnetic transmission characteristics of the two-dimensional lattice medium. Bennett Herbert S.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 6, 785—810 (англ.)

Рассматриваются условия и возможность распространения электромагнитных волн в двумерной решетчатой среде. Под решетчатой средой понимается диэлектрик с идеально проводящими неоднородностями, расположенными в узлах двумерной решетки.

Решения волнового уравнения для z-компоненты вектора Герца

$$\Delta\pi_z + k^2\pi_z = 0$$

внутри элементарной ячейки ищутся в виде

$$\pi_z = \psi(x, y; k)\, e^{-i(\omega t - K_T y)}.$$

Проводится приближенное сшивание решений в нескольких точках поверхности ячейки с учетом условий сопряжения:

$$\psi(x, y; k) = e^{iK_T a_1}\psi(x, y + a_1; k),$$

$$n\cdot[\nabla\psi(x, y; k)] = e^{iK_T a_1} n\cdot[\nabla\psi(x, y + a_1; k)],$$

$$\psi(x, y; k) = \psi(x + a_2, y; k),$$

$$n\cdot[\nabla\psi(x, y; k)] = n\cdot[\nabla\psi(x + a_2, y; k)],$$

где a_1— размер ячейки в направлении распространения волны, a_2— размер ячейки в перпендикулярном направлении. При сшивании в n парах точек дисперсионное уравнение относительно постоянной распространения K_T имеет вид

$$P_n\left[\operatorname{ctg}\left(K_T\frac{a_1}{2}\right)\right] = F(k),$$

где P_n — полином степени n. Строятся функции ψ, F и коэффициенты полинома P_n для эллиптической неоднородности в случае $n = 2$ и для круглой неоднородности в случае $n = 4$. Результаты численных решений получившихся дисперсионных уравнений приводятся в виде графиков.

Ю. Н. Днестровский

2589. Горизонтальный гидродинамический удар сферы при наличии свободной поверхности жидкости. Блох Э. Л., Прикл. математика и механика, 1953, 17, № 5, 579—592

Рассматривается пространственная задача горизонтального удара сферы об идеальную несжимаемую жидкость в трех случаях:

1) сфера погружена до половины в жидкость (внешняя задача);

2) сферическая оболочка заполнена жидкостью до половины (внутренняя задача);

3) сфера погружена до половины в жидкость, заполняющую сферический сосуд, концентричный с плавающей сферой.

Движение возникает в результате действия внезапно приложенной импульсивной силы, поэтому существует потенциал скорости φ, гармонический в области, ограниченной сферической поверхностью и удовлетворяющий следующим условиям: на смоченной поверхности границы задана нормальная производная $\partial\varphi/\partial n$, а в точках p и p', симметричных относительно свободной поверхности и лежащих на сфере,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_p = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{p'}.$$

Потенциал φ разлагается в ряд по шаровым функциям. Определяются импульсивные давления, действующие на поверхность сферы, а также коэффициент присоединенной массы. Вычислением приближенных значений импульсивных давлений и тангенциальной скорости точек сферы обнаруживается сходство с горизонтальным ударом круглого бесконечного цилиндра (плоская задача).

Д. Е. Долидзе

2590. Распространение тепла в бесконечном неоднородном теле в двух измерениях. Ким Е. И., Прикл. математика и механика, 1953, 17, № 5, 555—568

Дана бесконечная пластинка (плоскость x, y), состоящая из двух различных однородных листов, спаянных вдоль прямой $x = x_0$. Требуется определить ее температуру $u(x, y, t)$ при $t > 0$ по первоначальному распределению $u(x, y, 0) = f(x, y)$. Таким образом, нужно решить систему уравнений: $\partial u/\partial t = a_1^2\cdot\Delta u$ при $x < x_0$, $\partial u/\partial t = a_2^2\,\Delta u$ при $x > x_0$ ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$) с уже отмеченным начальным условием и с условиями сопряжения $u(x_0 - 0, y, t) = u(x_0 + 0, y, t)$, $k_1 u'_x(x_0 - 0, y, t) = k_2 u'_x(x_0 + 0, y, t)$, где a_1^2 и a_2^2 — коэффициенты теплопроводности, k_1 и k_2 — коэффициенты температуропроводности.

Автор решает задачу посредством функции влияния, применяя формулу Гаусса — Остроградского в частях $D_\varepsilon^{(1)}$ ($\xi < x_0$) и $D_\varepsilon^{(2)}$ ($\xi > x_0$) слоя ($-\infty < \xi, \eta < +\infty$, $0 < \tau \leqslant t - \varepsilon$) к выражению $vF_i(u) - uG_i(v)$, где $F_i(u) = a_i^2\,\Delta u - \partial u/\partial t$, $G_i(v) = a_i^2\,\Delta v + \partial v/\partial t$ ($i = 1, 2$), $u(\xi, \eta, \tau)$ — искомое решение, $v(\xi, \eta, \tau) = G(x - \xi, y - \eta, t - \tau, a_i) = [4a_i^2\pi(t - \tau)]^{-1}\times$ $\times \exp\{-[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\,[4a_i^2(t-\tau)]^{-1}\}$ — фундаментальное решение сопряженного уравнения $G_i(v) = 0$ (функция влияния), с последующим переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$. При этом u ищется среди функций, удовлетворяющих условиям:

$$|u(x, y, t)|\exp[-M(x^2 + y^2)] < N,$$
$$|\partial u/\partial x|\exp[-M(x^2 + y^2)] < N,$$
$$|\partial u/\partial y|\exp[-M(x^2 + y^2)] < N$$

при любых x, y и при $0 < t < \delta$, где δ зависит от M.

Ответ таков:

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_A^B f(\xi, \eta)\, G(x - \xi, y - \eta, t; a_i)\, d\xi +$$
$$+ (-1)^i \int_0^t \frac{(x - x_0)\, d\tau}{2(t - \tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_0, \eta, \tau)\times$$
$$\times G(x - x_0, y - \eta, t - \tau; a_i)\, d\eta -$$
$$- (-1)^i a_i^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u'_x(x_0 \mp 0, \eta, \tau)\times$$
$$\times G(x - x_0, y - \eta, t - \tau; a_i)\, d\eta,$$

где $x < x_0$ соответствуют $i = 1$, $A = -\infty$, $B = x_0$ и знак $(-)$, а $x > x_0$ соответствуют $i = 2$, $A = x_0$, $B = +\infty$ и знак $(+)$. Функция $u'_x(x_0 + 0, y, t)$ отыскивается из некоторого интегрального уравне-

ния Вольтерра, решаемого методом последовательных приближений; после этого $u_x(x_0 - 0, y, t)$ находится из условия сопряжения. Приводятся отдельно формулы для частного случая $f(x, y) = f(x)$.

М. К. Фаге

2591. Класс супер-аддитивных функций. Эйсен (A class of super-additive functions. Aisen Michael), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 3, 360—362 (англ.)

Функция множества $f(E)$ называется супер-аддитивной, если она равна нулю на пустом множестве и если

$$f(A) \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} f(A_\nu),$$

где A и A_ν — любые множества, на которых определена $f(E)$ и такие, что $A_\nu \subset A$, A_ν — дизъюнктны.

Пусть теперь A_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) — любые (может быть недизъюнктные) множества. Предположим, что $f(E)$ определена на всевозможных пересечениях k множеств A_ν и на множестве A, где $A \supset A_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Функция $f(E)$ называется супер-аддитивной S (в смысле Сильвестра), если она равна нулю на пустом множестве и если

$$f(A) \geqslant S_f(A_1, A_2, \ldots, A_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_k \leqslant n} f(A_{m_1} A_{m_2} \ldots A_{m_k}).$$

Очевидно, что супер-аддитивная S функция $f(E)$ супер-аддитивна. Обратное включение может не иметь места, что подтверждается примером, приведенным в статье.

Допустимым множеством плоскости (x, y) назовем ограниченное открытое множество, компоненты которого суть регулярные области (регулярная область — ограниченная, односвязная область, граница которой состоит из конечного числа аналитических кривых). Пустое множество допустимо.

Функцией напряжения допустимого множества E назовем непрерывную функцию $u(p, E)$, удовлетворяющую на E уравнению

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

и равную 0 вне E. Функция напряжения единственна.

Доказывается, что для всякой фиксированной точки $p(x, y)$ функций напряжения $u(p, E)$ как функция, определенная на допустимых множествах, супер-аддитивна S.

Отмечается, что результаты легко переносятся на случай евклидова пространства размерности большей двух, а также на функцию $u(p, D, g)$, определяемую так:

$$\Delta u = g(p), \quad p \notin D,$$
$$u = 0, \quad p \notin D,$$

где $g(p)$ — отрицательная функция.

Х. Л. Смолицкий

2592. Фильтрация в почти однородной среде. Остапенко В. Н., Украинский мат. ж., 1953, 5, № 3, 350—353

Для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial H}{\partial y}\right) = 0, \qquad (1)$$

где $k = k(x, y)$ — переменный коэффициент фильтрации, рассматривается вопрос об уклонении решений краевых задач теории фильтрации от соответствующих решений при $k = k_0 = \text{const}$. При довольно сильных дополнительных ограничениях, наложенных на $k(x, y)$, утверждается, что уклонение решений будет величиной того же порядка малости, что и величина $\delta = k(x, y) - k_0$. Полное доказательство не приводится.

В случае задачи Дирихле вопрос о непрерывной зависимости решений от коэффициентов уравнения более общего вида по сравнению с (1) был исследован ранее (Петровский И. Г., Усп. мат. наук, 1946, 1, № 3—4 (13—14), 44—70). *Г. Н. Положий*

2593. О математическом исследовании физиологических диффузионных процессов в цилиндрических областях. Тьюс (Über die mathematische Behandlung physiologischer Diffusionsprozesse in zylinderförmigen Objekten. Thews Gerhard), Acta Bioth., 1953, **A10**, 105—138 (нем.)

Кратко излагаются методы разделения переменных и преобразования Лапласа, которые применяются к решению задачи в следующих случаях: скорость поглощения постоянна, причем поглощаемое вещество вводится извне; процесс нестационарен, вещество подается изнутри вдоль коаксиального цилиндра; стационарный процесс в цилиндре конечной длины, градиент на границах внешнего и внутреннего цилиндров постоянен.

Хаусхолдер (*A. S. Householder*)

Из Math. Rev., 1953, 14, № 8, 759.

2594. Электрическая проводимость нерва и телеграфное уравнение. Дюамель (Conductibilité électrique du nerf et équation des télégraphistes. Duhamel Joseph), Ann. télécommun., 1953, 8, № 6, 197—205 (франц.)

Исследуется раздражение нерва электрическим током. Нерв считается состоящим из двух цилиндрических проводников — оболочки и ядра, которые отделены друг от друга тканевой мембраной. Раздражение происходит при помощи двух электродов, приключенных на двух различных местах оболочки. Исследования такого рода проведены также и в других работах (приводится обширный список литературы), но автор изучает задачу в предположении, что указанные проводники обладают самоиндукцией. Явление описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, которая приводится к обычному телеграфному уравнению с неизвестной функцией, означающей напряжение между оболочкой и ядром. Уравнение при нулевых начальных условиях решается операционным методом; считаются известными либо включенное напряжение, либо сила входящего тока, т. е. неизвестная функция на границе явно не задана. Поэтому выражение изображения значительно усложняется, так что обращение преобразования в общем случае автором не выполнено. Это сделано только в частных случаях при отсутствии самоиндукции или искажения, притом только для части нерва вне участка между электродами. Автор указывает, что реализация случая без искажения физически мало вероятна.

В конце работы приводятся общие физиологические рассуждения. *Э. Я. Риекстыньш*

2595. Приведение одной смешанной задачи теории установившихся упругих колебаний к интегральным уравнениям Фредгольма. Шаташвили С. Х., Сообщ. АН Груз. ССР, 1953, 14, № 5, 257—260

Плоская задача теории установившихся упругих колебаний рассматривается в случае, когда упругая среда заполняет конечную односвязную область на границе которой заданы касательная составляющая напряжений и нормальная составляющая смещений. Потенциалы — скалярный и векторный — представляются в виде интегралов с неизвестными плотностями и с ядрами, которые определенным образом выражаются через функции Бесселя. Подстановка указанных интегралов в краевые условия приводит к системе интегральных уравнений типа Фредгольма относительно неизвестных плотностей. *С. Г. Михлин*

2596 К. Ядра и эллиптические дифференциальные уравнения в математической физике. Бергман, Шиффер (Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics. Bergman Stefan, Schiffer M., pp. 432, ills, Academic Press, New York, 1953, 8.00 doll.), Science, 1953, 118, № 3062, 284 (библ.)

2597 К. Методы математической физики. Т. I. Курант, Гильберт (Methods of mathematical physics. Vol. I. Courant, Hilbert, pp. 560, 28 ill., Interscience publishers, Inc., New York, 1953, 8.50 doll. Vol. II in preparation), New Interscience titles, 1953, 14 (библ.)

См. также: 2468, 2470, 2471, 2473, 2474, 2476, 2477, 2485 К, 2529, 2564, 2569, 2624, 2628, 2632 Д, 2644, 2705, 2715 К, 2724 — 2727, 2794

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

2598. Некоторые теоремы о пределах последовательностей. Кошта (Alguns teoremas sobre limites de sucessões. Costa M. A. F.), Gaz. mat., 1953, 14, № 54, 7—13 (порт.)

2599. Определители в ряде для e^x. Станклифф (Determinants in the series for e^x (Curiosa). Stancliff Fenton), Scripta math., 1953, 19, № 1, 80 (англ.)

Приводится без доказательства разложение

$$e^x = 1^{-1} + x\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} + x^2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} + x^3\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} + \cdots$$

2600. Элементарное доказательство иррациональности числа e. Пеннисси (Elementary proof that e is irrational. Pennisi L. L.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 7, 474 (англ.)

2601. О системе тригонометрических уравнений. Лауренти (Sur un système d'équations trigonométriques. Laurenti F.), Mathesis, 1953, 62, 9—11 (франц.)

2602. Подсчет сумм четных степеней расстояний до вершин правильного многоугольника. Щелкачев В. Н., Вопр. геологии добычи и переработки нефти (Тр. Моск. нефт. ин-та), 1953, № 13, 130—132

Рассматриваются при натуральном σ суммы вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma},$$

где

$$r_\nu^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\left[\frac{2\pi}{n}(\nu - 1) - (\theta - \alpha)\right].$$

С использованием известных формул устанавливается равенство

$$\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma} = n\sum_{\varkappa=0} \frac{\sigma!}{(\varkappa!)^2(\sigma - 2\varkappa)!}(r^2 + R^2)^{\sigma-2\varkappa} r^{2\varkappa} R^{2\varkappa},$$

причем верхняя граница суммирования равна либо $\sigma/2$, либо $(\sigma - 1)/2$. Отмечается, что подсчет таких сумм необходим при исследовании неустановившегося потока жидкости в пористой среде. *А. А. Конюшков*

2603. О проблеме распределения Хичкока. Флад (On the Hitchcock distribution problem. Flood Merrill M.), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 2, 369—386 (англ.)

Рассматривается проблема составления наиболее рационального плана перевозки однородного груза от нескольких пунктов производства к ряду пунктов потребления (заданы объемы производства и потребления и затраты по перевозке единицы груза из каждого пункта в любой другой). Проблема сводится к экстремальной задаче, относительно формулировки которой автор ссылается на Хичкока (Hitchcock F.L., J. Math. and Phys., 1941, 20, 224—230).

Определить значения mn переменных x_{ij}, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ji} = c_j,\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = r_i;\quad x_{ij} \geqslant 0; \tag{1}$$

$$\sum_{i,j} x_{ij} d_{ij} = \min, \tag{2}$$

где m, n, r_i, c_j, d_{ij} — данные положительные числа, причем

$$\sum c_j = \sum r_i.$$

Пользуясь фундаментальными теоремами теории линейных неравенств, автор получает теорему существования решения и следующий признак: числа x_{ij}, удовлетворяющие (1), тогда и только тогда являются решением задачи, когда совместна система линейных неравенств и уравнений относительно u_i, v_j

$$d_{ij} + u_i - v_j \geqslant 0;\quad x_{ij}(d_{ij} + u_i - v_j) = 0$$
$$(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

Далее излагается вычислительный процесс построения решения — некоторый метод последовательных приближений, описание которого является основной частью работы.

В статье цитируется заметка Л. В. Канторовича (Докл. АН СССР, 1942, 37, 227—229), в которой содержится доказательство теоремы существования решения и сформулированный выше признак (для более общей задачи). По поводу метода см. также Канторович Л. В., Математические методы планирования и организации производства, Изд-во ЛГУ, 1939.

Г. Ш. Рубинштейн

2604. Разделение на компоненты и восстановление сигнала при помощи теории функций. Маршан (Analysis of multiplexing and signal detection by function theory. Marchand Nathan), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, № 8, 48—56 (англ.)

В предисловии указывается, что введение многомерного пространства дает возможность использовать единообразный метод как для сравнения различных существующих радиотехнических систем, так и для создания новых систем.

Далее по функции времени $f(t)$, заданной в некотором интервале (α, β), строится n-мерное векторное пространство. Для этого интервал (α, β) разделяется на n равных частей точками $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ так, что $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Каждому интервалу (t_i, t_{i+1}) приписывается направление в n-мерном пространстве, а координатой φ_i в этом направлении служит величина $\varphi_i = E_i \sqrt{\Delta t}$, где E_i есть значение $f(t)$ в точке t_i.

Все последующее изложение посвящено элементарной теории этого n-мерного пространства.

Автор указывает, что для однозначного восстановления функции $f(t)$ по ее значениям в n точках t_i необходимо, чтобы n было вдвое больше наивысшей частоты F, содержащейся в частотном представлении $f(t)$. (Эта теорема известна. — *Прим. реф.*).

В заключение в качестве примера применения теории указывается на возможность осуществления одновременной системы передачи цветного телевидения.

Я. И. Хургин

2605 К. Главы высшей математики для физиков и инженеров. I. Линейная алгебра и дифференциальное исчисление. Дельтей (Compléments de mathématiques générales à l'usage des physiciens et des ingénieurs. I. Algèbre linéaire et calcul différentiel. Deltheil R., pp. 200, 15 figs, Bailliere et fils, Paris, 1953, 1500 fr.), Ann. télécommun., 1953, 8, № 8—9, A581 (библ.)

2606 К. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Т. 3. Рóте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. T. 3. Rothe Rudolf, 6. Aufl., S. 236, 167 Abb., Teubner, Leipzig, 1953, 5.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1953, № 37, 1598 (библ.)

2607 К. Справочник по эллиптическим интегралам для инженеров и физиков. Берд, Фридман (Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Byrd Paul F., Friedman Morris D. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 67), pp. 340, 22 fig., Springer-Verlag, Berlin, 1953, 39.60 DM), Neue Bücher, 1953, Oct. (библ.)

2608 К. Элементы математического анализа. II. Скорца-Драгони (Elementi di analisi matematica. II. Scorza-Dragoni G., pp. 635, II. CEDAM, Padowa, 1953, 4000 L.), Internat. math. Nachr. 1953, 7, № 27/28, 27 (библ.)

2609 К. Введение в высшую математику. Фейгль, Рорбах (Einführung in die höhere Mathematik. Feigl G., Rohrbach H., S. 376, Springer, Berlin, 1953, 26.80 DM), Internat. math. Nachr. 1953, 7, № 27/28, 22 (библ.)

2610 РЕЦ. Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению. Т. 1, 2. Островский (Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Ostrowski A., B. I. Funktionen einer Variablen, XII+373 S., 1945; B. 2. Differentialrechnung aus dem Gebiete mehrerer Variablen, 482 S., 1951, Verlag Birkhäuser, Basel) [Рецензия: Часар (Császár Ákos), Acta scient. math, 1953, 15, № 1, 93—94 (нем.)]

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2611. Об умножении двойных рядов и двойных интегралов. Челидзе В. Г., Тр. Тбилисского мат. ин-та АН Груз. ССР, 1953, 19, 135—151 (русск.; резюме груз.)

Автор распространяет (даны аналоги) некоторые классические теоремы об умножении рядов и интегралов (Харди Г., Расходящиеся ряды, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, 283—306) на двойные ряды и на двойные интегралы.

Ряд

$$\sum_{i,\,k=0}^{\infty} a_{ik} \tag{1}$$

с частными суммами

$$A_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{ik}$$

называется сходящимся, если существует $\lim A_{mn} = A$ (m, n независимо друг от друга стремятся к бесконечности), где A — конечное число. Особое значение имеют ряды, удовлетворяющие условию

$$\lim_{m+n\to\infty} \frac{A_{mn}}{m+n} = 0. \tag{\omega}$$

Определяются методы суммирования рядов $C_\lambda(1, 1)$ и A_λ (чезаровского и пуассоновского типов).

Пусть еще дан ряд

$$\sum_{i,\,k=0}^{\infty} b_{ik}. \tag{2}$$

Под произведением рядов (1) и (2) понимается двойной ряд

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik}, \qquad (3)$$

где

$$c_{ik} = \sum_{p=0}^{i} \sum_{q=0}^{k} a_{pq}\, b_{i-p,\, k-q}.$$

В случае сходимости рядов (1), (2) и (3) их суммы соответственно обозначим через A, B и C.

Доказывается:

1) если ряды (1) и (2) сходятся, причем ряд (1) сходится абсолютно, а частные суммы ряда (2) ограничены, то ряд (3) сходится и имеет место равенство $AB = C$;

2) если ряды (1), (2) и (3) сходятся, причем их частные суммы удовлетворяют условию (ω), то справедливо равенство $AB = C$;

3) если ряды (1) и (2) сходятся и, кроме того, частные суммы ряда (2) ограничены, а частные суммы ряда (1) удовлетворяют условию (ω), то ряд (3) $C_\lambda(1,1)$-суммируем к сумме AB;

4) если ряды (1) и (2) сходятся, их частные суммы удовлетворяют условию (ω), то ряд (3) A_λ-суммируем к сумме AB.

Аналогичные результаты получены и для двойных интегралов.

В статье имеются опечатки. *М. П. Щеглов*

2612 К. **Бесконечные ряды. Хислоп** (Infinite series. Hyslop James Morton, 4-th ed. revised. (University mathematical texts series, ed. by Alexander C., Aitken and Daniel E. Rutherford), pp. XI+121, Oliver and Boyd, Edinburgh, London, 1953), Brit. Nat. Bibliogr., № 191, 7 (библ.)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

2613 РЕЦ. **О единой теории специальных функций, основанной на функциональном уравнении $\frac{\partial}{\partial z} F(z,\alpha) = F(z,\alpha+1)$. Труселл** (An essay toward a unified theory of special functions, based upon the functional equation $\frac{\partial}{\partial z} F(z,\alpha) = F(z,\alpha+1)$. Truesdell C., Princeton University Press, 1948, 182 s.) [Рецензия: Сибакаки (柴垣和三雄), 數學 (Сугаку), 1953, 5, № 1, 51—53 (япон.)]

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2614. **О степенных рядах в операционном исчислении. Рылл-Нардзевский** (Sur les séries de puissances dans le calcul opératoire. Ryll-Nardzewski C.), Studia math., Warszawa, 1953, **13**, № 1, 41—47 (франц.)

Обобщается в различных направлениях следующая теорема Микусинского (G.-Mikusiński Jan, Studia math., Warszawa, 1950, **11**, № 1, § 21):

Если радиус сходимости R степенного ряда

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \qquad (1)$$

положителен, то ряд

$$a_1 f\lambda + a_2 f^2\lambda^2 + a_3 f^3\lambda^3 + \dots, \qquad (2)$$

где f — произвольная непрерывная комплекснозначная функция вещественного аргумента t и

$$f^n = \int_0^t f^{n-1}(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \quad (n = 1, 2, \dots;\ f^1 = f), \qquad (3)$$

сходится равномерно в области $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $|\lambda| \leqslant \rho$ при любых t_0 и ρ.

Первое обобщение связано с расширением класса непрерывных функций до многообразия $\mathfrak{L}$ функций, суммируемых в каждом конечном интервале $(0, a)$ полуоси $t \geqslant 0$; при этом $\mathfrak{L}$-сходимость последовательности $g_n \in \mathfrak{L}$ к $g \in \mathfrak{L}$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a |g(x) - g_n(x)|\, dx = 0$$

для каждого $a < \infty$. Соответствующая теорема состоит в том, что, в предположении положительности R, ряд (2) $\mathfrak{L}$-сходится при всех $f \in \mathfrak{L}$ к некоторой функции из $\mathfrak{L}$ и сходимость равномерна по λ в любом круге $|\lambda| \leqslant \rho$.

Второе обобщение связано с заменой формулы (3) формулой

$$f^n = \int_0^t f^{n-1}(t-\tau)\, df(\tau) \quad (n = 1, 2, \dots;\ f^1 = f)$$

и заменой класса непрерывных функций многообразием $\mathfrak{B}$ комплекснозначных функций $f(t)$ вещественного аргумента $t \geqslant 0$, непрерывных слева, обладающих ограниченной вариацией в каждом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и удовлетворяющих условию $f(0) = 0$. Соответствующая теорема состоит в том, что ряд (2) при $f \in \mathfrak{B}$ сходится равномерно в каждой области $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $|\lambda| \leqslant \rho < R/|g(0+)|$ к некоторой функции из $\mathfrak{B}$.

Заключительное обобщение связано с подстановкой в ряд (2) оператора $f = sg$, где s — дифференциальный оператор в смысле Микусинского (см. РЖМат, 1954, 2234; там же указан смысл произведения s и g как элементов некоторого поля отношений $\mathfrak{M}$ и дано определение сходимости в $\mathfrak{M}$). Соответствующая теорема состоит в том, что при $f = sg$ радиус сходимости ряда операторов (2) есть $R/|g(0+)|$ и сходимость равномерна по λ в каждом круге $|\lambda| \leqslant \rho < R/|g(0+)|$. *И. М. Глазман*

2615. **К обобщению одной теоремы Харди — Литлвуда. Щеглов М. П.**, Украинский мат. ж., 1953, **5**, № 3, 299—303

Автор называет последовательность $\{s_n\}$ принадлежащей P, если $s_n \geqslant 0$. Обозначается:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} s_v, \qquad \varphi(u) = \frac{1}{u} \sum_{v=0}^{\infty} s_v e^{-v/u}.$$

Вводятся конечные или бесконечные числа

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, \sigma_n = D, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varphi(u) = D'.$$

Доказываются следующие утверждения для $\{s_n\} \in P$: 1) D и D' одновременно либо конечны, либо бесконечны. 2) Если $0 < D' < \infty$, то а) $\inf\limits_{(P)} (D - D') = 0$; б) $\sup\limits_{(P)} (D - D') = \infty$; в) $\inf\limits_{(P)} D/D' = 1$; г) $\sup\limits_{(P)} D/D' = e$. 3) Если $\overline{\lim}\, s_n = D$, то $D' = D$. 4) Существует последовательность $\{s_n\} \in P$, для которой $D = D' < \overline{\lim}\, s_n$. *А. Г. Постников*

2616. Относительно решений некоторых особенных интегральных уравнений. Обрешков Н., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 6, 1117—1120

Изучается уравнение

$$f(x) = \int_0^\infty g(xt)\,\varphi(t)\,dt, \qquad (1)$$

где $g(x) = (2x)^\delta W_{0,m}(2x)$, $\delta = m - 1/2$, а $W_{0,m}(x)$ — функция Уитеккера

$$W_{0,m}(x) = \frac{e^{-x/2}\,x^{-\delta}}{\Gamma(m + 1/2)} \int_0^\infty t^\delta (x + t)^\delta e^{-t}\,dt$$

(Уитеккер Е. Г., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. II, ГТТИ, 1934, 139—154).

Пусть функция $\varphi(x)$ интегрируема в каждом интервале $(0, x)$, $x > 0$, и интеграл (1) сходится для некоторого $x = c > 0$. При $x > c$ конструируется последовательность функций $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., определенная рекуррентной формулой

$$f_n(x) = f_{n-1}'(x) - (2\delta/x) f_{n-1}''(x) \quad (n \geqslant 1). \qquad (2)$$

Доказывается, что в каждой точке Лебега $\alpha > 0$ функции $\varphi(x)$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{4^\delta \sqrt{\pi}\, n^{\delta - 1/2}\, \alpha^{2n+1}} f_n\left(\frac{2n}{\alpha}\right) = \varphi(\alpha).$$

Далее рассматривается уравнение

$$f(x) = \int_0^\infty g(xt)\,d\omega(t), \qquad (3)$$

где $\omega(x)$ — действительная монотонно возрастающая функция для $x \geqslant 0$. Без доказательства приводятся необходимые и достаточные условия того, чтобы функция $f(x)$ была представима интегралом (3) с $\delta > -1/2$. Они состоят в том, чтобы функция $f(x)$ стремилась к некоторому пределу, если $x \to \infty$, и функции $f_n(x)$, определенные рекуррентной формулой, подобной (2), были неотрицательны для $x > 0$. В случае ограниченности функции $\omega(x)$ добавляется условие $f(0) = f(+0)$. Автор отмечает, что последняя теорема может рассматриваться как обобщение теоремы С. Н. Бернштейна об интегральном представлении абсолютно монотонных функций, так как $g(x) = e^{-x}$ при $\delta = 0$. *М. А. Красносельский*

2617. Преобразование Лапласа как математическое оружие инженера. Добеш (Die Laplace-Transformation, ein mathematisches Hilfsmittel des Ingenieurs. Dobesch Heinz), Nachrichtentechnik, 1953, 3, № 9, 412—414 (нем.)

Простейшие примеры приложений преобразования Лапласа к электротехнике. *В. И. Левин*

См. также: 2473, 2480, 2484 К, 2498, 2499, 2501, 2504, 2518, 2557, 2560, 2593, 2622, 2646, 2673, 2729, 2741, 2743 К, 2744 К

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

2618. Обобщенные полуупорядоченные кольца. Вулих Б. З., Мат. сб., 1953, 33(75), № 2, 343—358

Исследуется возможность введения операции умножения в K-линеалах. Для случая K-пространства с единицей этот вопрос рассмотрен автором ранее (Докл. АН СССР, 1940, 26, 847—851; Мат. сб., 1948, 22(64), 27—78).

Множество X называется обобщенным полуупорядоченным кольцом с единицей умножения, если: 1) X — полуупорядоченная группа, в которой существование граней постулируется только для любых конечных множеств; 2) для некоторых пар элементов x, $y \in X$ определено произведение $xy \in X$, причем: а) если существуют произведения xy, yz и существует одно из произведений $(xy)z$ или $x(yz)$, то существует и второе и $(xy)z = x(yz)$; б) из существования xy и xz вытекает существование $x(y + z)$ и равенство $x(y + z) = xy + xz$, из существования yx и zx вытекает существование $(y + z)x$ и равенство $(y + z)x = yx + zx$; в) в X существует единица умножения i со свойством $xi = ix = x$ для всех $x \in X$; г) если существует xy и $|x_1| \leqslant |x|$, $|y_1| \leqslant |y|$, то существует x_1y_1; д) если x, $y \geqslant 0$ и xy существует, то $xy \geqslant 0$.

Если произведение определено для любой пары элементов X, то X называется полуупорядоченным кольцом.

Основная теорема: Пусть X — полный в смысле равномерной сходимости архимедов K-линеал с единицей. Для того чтобы в нем можно было для некоторых пар элементов определить их произведение так, чтобы X превратилось в обобщенное полуупорядоченное кольцо, в котором единица умножения совпадает с единицей K-линеала, необходимо и достаточно, чтобы X был внутренне нормальным K-линеалом. При этом X может быть превращен в обобщенное полуупорядоченное кольцо с совпадающими единицами умножения и K-линеала единственным способом, а это кольцо непременно оказывается коммутативным.

Свойство K-линеала быть внутренне нормальным зависит от выбора в нем единиц. В работе охарактеризован класс единиц, при выборе которых K-линеал не перестает быть внутренне нормальным.

Примером полуупорядоченного кольца может

служить K-линеал $C_\infty(Q)$ всех непрерывных функций, заданных на бикомпакте Q и допускающих значения $\pm\infty$ на нигде не плотных отделяющих множествах (по поводу понятий внутренне нормального K-линеала и отделяющего множества см. РЖМат, 1954, 1, 20).

Доказывается теорема: Если в полуупорядоченном кольце $X = C_\infty(Q)$ с единицей умножения, равной 1 ($1(t) \equiv 1$), взять за новую единицу такой элемент $\eta > 0$, для которого η^{-1} существует, и X с новой единицей η превратить в полуупорядоченное кольцо, то получится кольцо, изоморфное первоначальному.

Функционал f, заданный на обобщенном полуупорядоченном кольце, называется мультипликативным, если $f(xy) = f(x)\,f(y)$ всегда, когда xy существует.

Пусть X — внутренне нормальный, полный относительно равномерной сходимости архимедов K-линеал с единицей, совпадающей с единицей умножения, реализованный на бикомпакте Q в виде K-линеала $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ непрерывных функций, допускающих значения $\pm\infty$ на нигде не плотных отделяющих множествах. Устанавливается, что если f — аддитивный, мультипликативный функционал на X и $f \neq 0$, то существует такое $t_0 \in Q$, что $f(x) = x(t_0)$ для любого $x \in X$. Обратно, если $t_0 \in Q$ — такая точка, в которой $x(t_0)$ имеет конечное значение для любого $x \in X$, то $f(x) = x(t_0)$ — аддитивный, мультипликативный функционал.

Функционалы этого рода рассмотрены также М. Г. Крейном и С. Г. Крейном (Мат. сб., 1943, 13(55), 1—38). *А. Г. Пинскер*

2619. Характеристические свойства произведения в линейных полуупорядоченных пространствах. Вулих Б. З., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1953, 89, 3—8

Пусть $z = F(x, y)$ — однозначная функция от двух аргументов из полуупорядоченного пространства X с единицей со значениями в том же пространстве. Приводятся необходимые и достаточные условия, при которых $F(x, y)$ совпадает с произведением элементов x и y. Последовательно рассматриваются случаи K-пространства ограниченных элементов, расширенного K-пространства и, наконец, произвольного K-пространства с единицей. *А. Н. Балуев*

2620. К теории линейных уравнений в пространствах Банаха. Харазов Д. Ф., Тр. Тбилисского мат. ин-та АН Груз. ССР, 1953, 19, 163—171 (русск.; резюме груз.)

Пусть T_λ — линейный вполне непрерывный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве и аналитически зависящий от параметра λ в некоторой области Λ комплексной плоскости.

Доказывается следующая теорема:

Оператор $(E - T_\lambda)^{-1}$ либо не существует ни в одной точке $\lambda \in \Lambda$, либо существует всюду в Λ, за исключением, может быть, некоторого множества точек λ, не имеющего предельной точки в Λ.

Устанавливается, что сформулированная теорема справедлива и в том случае, когда T_λ зависит аналитически от λ в области $\Lambda \setminus M$ ($M \subset \Lambda$) и в некоторой окрестности каждой точки $\mu \in M$ оператор T_λ представляется в виде

$$T_\lambda = H_\lambda + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\lambda - \mu)^i} K_i,$$

где H_λ — линейный вполне непрерывный оператор, аналитически зависящий от λ в указанной окрестности, и K_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — линейные конечномерные операторы.

Приведенные выше результаты прилагаются к интегральным уравнениям второго рода с ядрами, зависящими от параметра и рассматриваемыми в L_p.

В случае $p = 2$ отсюда следуют теоремы Тамаркина (Tamarkin I., Ann. Math., 1927, 28, № 2, 127—152).

Отмечается, что сформулированная выше теорема следует из одной теоремы референта (Докл. АН СССР, 1951, 78, № 4, 629—632).

Следует отметить, что в формулировках теорем нужно требовать односвязность области Λ (это используется в доказательстве), иначе приведенные результаты могут быть неверными. *И. Ц. Гохберг*

2621. О линейных операторах в пространстве Банаха и альтернативе Фредгольма. Оден (Sur les transformations linéaires dans les espaces de Banach et l'alternative de Fredholm. Audin Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 10, 511—512 (франц.)

Пусть линейный ограниченный оператор A, действующий в банаховом пространстве, представлен в виде суммы двух линейных ограниченных операторов

$$A = A_1 + L. \qquad (1)$$

Пусть R — радиус сходимости ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_1^i$.

Точная верхняя грань чисел R, соответствующих всевозможным представлениям A в виде (1), где L — вполне непрерывный оператор, называется радиусом Фредгольма оператора A и обозначается R_A (Радон, Усп. мат. наук, 1936, № 1, 200—227). Рисс и Надь (Riesz F., Sz.-Nagy B., Leçons d'analyse fonctionnelle, Acad. sci. de Hongrie, 1952) определили радиус Фредгольма r_A оператора A как точную верхнюю грань чисел $\| A_1 \|^{-1}$, соответствующих всевозможным представлениям оператора A в виде (1), где L — конечномерный оператор.

Автор вводит радиус Шмидта ρ_A оператора A, равный точной верхней грани чисел R, соответствующих всевозможным представлениям A в виде (1), где L — конечномерный оператор. Доказывается, что если A — вполне непрерывный оператор, то $\rho_A = \infty$. Приводятся следующие соотношения между рассматриваемыми радиусами: $\| A \|^{-1} \leqslant r_A \leqslant \rho_A \leqslant R_A$, и указывается, что в соотношениях $\| A \|^{-1} \leqslant r_A \leqslant \rho_A$ возможны оба знака равенства. Ставятся две проблемы:

1. Равно ли r_A бесконечности, если A — вполне непрерывный оператор? Это известная, открытая до сих пор проблема о том, возможна ли аппроксимация по норме с любой степенью точности вполне непрерывного оператора конечномерным в общем банаховом пространстве.

2. Является ли ρ_A равным $\rho_{A'}$? Здесь явная опечатка: повидимому, одно из чисел ρ_A следует заменить R_A.

Новых результатов и проблем работа не содержит, ибо справедливость равенства $\rho_A = R_A$ доказана в цитируемой автором работе С. М. Никольского (Изв. АН СССР, сер. мат., 1943, 7, № 3, 147—166) на стр. 159. *И. Ц. Гохберг*

2622. Операторное исчисление для операторов со спектром в полосе. Бейд (An operational calculus for operators with spectrum in a strip. Bade William G.), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 2, 257—290 (англ.)

Для замкнутых операторов T в пространстве Банаха, спектр которых целиком лежит в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant \gamma$, автор строит функции $f(T)$ от оператора T.

Сначала $f(T)$ строится для класса $\mathscr{L}(0,\gamma)$ функций $f(\lambda)$, аналитических в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant r$, $r > \gamma$ (r зависит от $f(\lambda)$) и таких что:

1) $f(\sigma + i\tau) \to 0$ при $\tau \to \pm\infty$ равномерно относительно σ, $-r_1 \leqslant \sigma \leqslant r_1$ при любом $r_1 < r$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + i\tau)|\, d\tau < \infty$, $-r < \sigma < r$.

Затем это определение распространяется на класс $\mathscr{L}(n,\gamma)$ функций $f(\lambda)$ таких, что $f(\lambda)(\alpha-\lambda)^{-n} \in \mathscr{L}(0,\gamma)$ при $|\operatorname{Re}\alpha| > \gamma$.

Пусть Γ_c означает контур, состоящий из двух параллельных прямых $\operatorname{Re}\lambda = -c$ и $\operatorname{Re}\lambda = c$, причем направление обхода задано на первой прямой сверху вниз, а на второй — снизу вверх. Тогда $f(T)x$ для $f \in \mathscr{L}(0,\gamma)$ и произвольного вектора x определяется по формуле

$$f(T)x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_c} f(\lambda) R_\lambda(T)x\, d\lambda, \qquad (1)$$

где $R_\lambda(T)$ — резольвента оператора T и $\gamma < c < r$. Если же $f \in \mathscr{L}(n,\gamma)$, x принадлежит области определения $D(T^n)$ оператора T^n, то $f(T)x$ определяется по формуле

$$f(T)x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_c} \frac{f(\lambda) R_\lambda(T)(\alpha I - T)^n x}{(\alpha-\lambda)^n}\, d\lambda, \qquad (2)$$

где $|\operatorname{Re}\alpha| > \gamma$ и $C < |\operatorname{Re}\alpha|$.

Основные результаты:

1. Если $f \in \mathscr{L}(m,\gamma)$, $g \in \mathscr{L}(n,\gamma)$ и $x \in D(T^{m+n})$, то $g(T)x \in D(T^m)$ и $f(T)g(T)x = (fg)(T)x$.

2. Если $f \in \mathscr{L}(n,\gamma)$, $x \in D(T^n)$ и $|\operatorname{Re}\alpha| < c$, то

$$f(T)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(\alpha)(T-\alpha I)^k x}{k!} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_c} \frac{f(\lambda) R_\lambda(T)(T-\alpha I)^n x}{(\lambda-\alpha)^n}\, d\lambda. \qquad (3)$$

3. Пусть $f \in \mathscr{L}(n,\gamma) \setminus \mathscr{L}(n-1,\gamma)$ и $h(\lambda) = f(\lambda)(\alpha-\lambda)^{-n}$, $|\operatorname{Re}\alpha| > \gamma$; пусть $\tilde{f}(T)$ — оператор, область определения $D(\tilde{f}(T))$ которого состоит из всех векторов x таких, что $h(T)x \in D(T^n)$, причем $\tilde{f}(T)x = (\alpha I - T)^n h(T)x$. Тогда $D(\tilde{f}(T))$ не зависит от α и $\tilde{f}(T)$ есть замкнутое расширение оператора $f(T)$.

Автор устанавливает связь его определения функции от оператора с определением, данным Тейлором (Taylor A. E., Acta math., 1950, 84 189—224), и с теорией Хилла полугрупп операторов.

Пусть $\mathscr{V}(\gamma)$ — совокупность всех функций $f(\lambda)$ вида

$$f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\xi}\, d\beta(\xi),$$

где $\beta(\xi)$ — функция с ограниченной вариацией в интервале $(-\infty, \infty)$, $\beta(-\infty) = 0$ и такая, что интеграл сходится абсолютно при $-r \leqslant \operatorname{Re}\sigma \leqslant r$ и некотором $r > \gamma$. Пусть, далее, $h_n(\lambda) \in \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathscr{L}(k,\gamma)$, $h_n(\lambda) f(\lambda) \in \mathscr{V}(\gamma)$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(\lambda) f(\lambda) = 1$ ($|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant r$) и при некотором $k \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma_r} |\lambda^{-k}[1 - h_n(\lambda) f(\lambda)]|\, |d\lambda| = 0.$$

Тогда при $f \in \mathscr{V}(\gamma)$ и $x \in D(T^k)$ будет

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(T) f\{T\} x = x.$$

При этом

$$f\{T\}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathscr{U}_\xi x\, d\beta(\xi),$$

где $\mathscr{U}_\xi$ — полугруппа, определенная оператором T.

Последний результат применяется к оператору дифференцирования в пространствах $C[-\infty, \infty]$, $L_p(-\infty, \infty)$, $C[-\pi, \pi]$ и $L_p(-\pi, \pi)$.

М. А. Наймарк

2623. О неограниченных полугруппах ограниченных линейных операторов. Феллер (On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators. Feller William), Ann. Math., 1953, 58, № 1, 166—174 (англ.)

Обобщаются результаты Хилла — Иосида на полугруппы T_t, не удовлетворяющие условию непрерывности при $t = 0$.

Пусть X — комплексное пространство Банаха и пусть каждому $t > 0$ отвечает линейный ограниченный оператор T_t в X; функция T_t называется полугруппой, если $T_{t+s} = T_t \cdot T_s$. Предполагается, что а) множество R элементов вида $T_t x$ плотно в X; б) $T_{t+h}x \to T_t x$ при $h \downarrow 0$ для любых $t > 0$ и $x \in X$; при этом здесь и в дальнейшем сходимость понимается в смысле нормы в X. Отсюда вытекает, что $\lim(t^{-1}\log\|T_t\|) < \infty$, и потому, заменив T_t на $e^{-at}T_t$, можно считать, что в) норма $\|T_t\|$ ограничена при $t \to +\infty$.

Пусть Σ — множество всех векторов $x \in X$, для которых $T_t x \to x$ при $t \to 0$, и пусть $N(x) = \sup\|T_t x\|$; тогда Σ плотно в X и $\|x\| \leqslant N(x) < \overset{t>0}{<} +\infty$ для $x \in \Sigma$.

Кроме того, при $x \in \Sigma$ существует $y = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{T_t x - x}{t}$

Автор определяет инфинитезимальный оператор Ω полугруппы T_t, полагая $\Omega x = y$ при $x \in \Sigma$. Оказы-

вается, что если выполнены условия а), б), в), то:

1) Σ есть пространство Банаха по отношению к норме $N(x)$;

2) при $x \in \Sigma$ и $\lambda > 0$ уравнение $\lambda\xi - \Omega\xi = x$ имеет единственное решение $\xi = I_\lambda x$;

3) по отношению к норме $N(x)$ оператор I_λ ограничен, именно $N(\lambda I_\lambda) \leqslant 1$;

4) при $x \in \Sigma$ $N(\lambda I_\lambda - x) \to 0$, когда $\lambda \to \infty$;

5) при фиксированных $x \in \Sigma$ и $0 < \delta' < \delta$ существует такое $\lambda_0 = \lambda_0(x, \varepsilon)$, что при $n \geqslant \lambda\delta$ и $\lambda > \lambda_0$ выполнено неравенство $\lambda^n \| I_\lambda^n x \| \leqslant | v(\delta') + \varepsilon | \| x \|$, где $v(t) = \sup\limits_{s>0} \| T_{t+s} \|$;

6) $\xi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} (T_s x)\, ds$;

7) $N(x) = \sup\limits_{n \geqslant 0} \sup\limits_{\lambda > 0} \| \lambda^n I_\lambda^n x \|$.

Обратно, пусть Σ — линейное множество, плотное в X, а Ω — линейный оператор с областью определения и изменения в Σ.

Пусть выполнено условие 2), причем $N(x)$, определенное в 7), конечно при $x \in \Sigma$; пусть Σ есть пространство Банаха по отношению к норме $N(x)$ и пусть выполнены условия 3), 4) и 5), где $v(t)$ — произвольная неубывающая функция. Тогда существует полугруппа T_t, удовлетворяющая условиям а), б), в), для которой Σ совпадает с множеством векторов x, удовлетворяющих условию $T_t x \to x$ при $t \to 0$, а инфинитезимальный оператор полугруппы совпадает с Ω. При этом $\| T_{t+s} \| \leqslant v(t)$, $s > 0$ и для $x \in X$

$$T_t x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (\lambda^n I_\lambda^n x).$$

Полугруппа T_t, определенная оператором Ω, непрерывна при $t = 0$ тогда и только тогда, когда для любых $x \in X$ и $\lambda > 0$ уравнение $\lambda\xi - \Omega\xi = x$ имеет единственное решение $\xi = I_\lambda x$, причем: 1) область изменения $I_\lambda x$ плотна в X; 2) существует такая константа C, что $\lambda^n \| I_\lambda^n x \| \leqslant C \| x \|$.

Замеченная опечатка: на стр. 169 в формуле (3.16) напечатано $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} (T_{t+s})\, ds$; следует читать $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} (T_{t+s} x)\, ds$.

М. А. Наймарк

2624. Об одной теореме Н. К. Бари. Костюченко А. Г., Скороход А., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 5 (57), 165—166

Дается простое доказательство следующей теоремы Н. К. Бари: Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве даны две ортонормированные системы $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$.

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| \varphi_k - \psi_k \|^2 < \infty,$$

то системы одновременно полны или нет.

Эта теорема вместе с классическими асимптотическими формулами дает возможность доказать полноту системы собственных функций задачи Штурма — Лиувилля. *В. М. Левитан*

2625. Видоизменение характеристики гильбертовых пространств при помощи закона параллелограмма. Эллис (A modification of the parallelogram law characterization of Hilbert spaces. Ellis David), Math. Z., 1953, 59, № 1, 94—96 (англ.)

Известно, что так называемый закон параллелограмма

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 (\| x \|^2 + \| y \|^2), \quad (1)$$

справедливый в пространстве Гильберта, является характеристическим свойством этого пространства: если в банаховом пространстве B норма удовлетворяет закону параллелограмма, то B — пространство Гильберта (Blumenthal L. M., Distance Geometries, Columb., Univ. Missouri, 1938).

В реферируемой работе приводится некоторое уточнение этого предложения для того случая, когда B — вещественное полуупорядоченное пространство Банаха.

Если полуупорядоченность, заданная в B, такова, что для любых двух элементов x, $y \in B$ существуют $x \vee y = \sup(x, y)$ и $x \wedge y = \inf(x, y)$, причем $\| \sup(x, -x) \| = \| x \|$, то, для того чтобы B было пространством Гильберта, достаточно (и, конечно, необходимо), чтобы (1) выполнялось для всех $x \doteq 0$; $y \doteq 0$.

Если же сверх этого для всяких x, $y \doteq 0$ выполняется соотношение: $\| x \|^2 + \| y \|^2 = \| \sup(x, y) \|^2 + \| \inf(x, y) \|^2$ (оно, очевидно, выполняется в вещественном гильбертовом пространстве, если его полуупорядочить «по координатам»: $x \doteq y$, когда $(x, e_\alpha) \geqslant (y, e_\alpha)$), то B будет гильбертово, если (1) справедливо для всяких $x \doteq y \doteq 0$.

Следует отметить, что полуупорядоченность в линейных пространствах изучалась советскими математиками значительно раньше, чем теми авторами, на которых ссылается в своей работе Эллис (см., например, Канторович Л. В., Мат. сб., 1937, 2(44), № 1, 121—168; Рутман М. А., Докл. АН СССР, 1938, 18, № 9, 625—628; Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1940, 28, № 1, 13—17, 18—22; Крейн М. Г., Рутман М.А., Усп. мат. наук, 1948, 3, № 1(23), 3—95).

М. А. Рутман

2626. О сжатиях гильбертова пространства. Надь (Sur les contractions de l'espace de Hilbert. Sz.-Nagy Béla), Acta scient. math., 1953, 15, № 1, 87—92 (франц.)

Сжатием гильбертова пространства автор называет линейный оператор T, норма которого не превосходит единицы ($\| T \| \leqslant 1$).

Доказываются следующие теоремы, устанавливающие существование тесной связи между произвольными сжатиями и унитарными преобразованиями:

I. Если T — сжатие пространства H Гильберта, то существуют пространство Гильберта $\mathbf{H}$, содержащее H в качестве подпространства, и унитарное преобразование U пространства $\mathbf{H}$, удовлетворяющие условиям

$$T^k = PU^k, \quad (T^*)^k = PU^{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где P — оператор ортогонального проектирования на подпространство H.

II. Если сжатия $T_t\,(0\leqslant t<\infty)$ пространства H образуют непрерывную полугруппу, то существуют пространство $\mathbf{H}$ $(\mathbf{H}\supset H)$ и непрерывная полугруппа унитарных преобразований U_t $(0\leqslant t<\infty)$ пространства $\mathbf{H}$, удовлетворяющие условию $T_t=PU_t\,(0\leqslant t<\infty)$, где P — оператор проектирования на H.

При помощи теоремы I получаются новые простые доказательства следующих известных для сжатий результатов:

а) Если $Tf=f$ $(f\in H)$, то и $T^*f=f$.

б) Среднее арифметическое $\dfrac{1}{n-m}\sum_{m}^{n-1}T^kf\,(f\in H)$ стремится при $n>m\geqslant 0$, $n-m\to\infty$ к элементу f^* $(f^*\in H)$, инвариантному относительно T.

в) Пусть $u(z)$ — функция, регулярная в области, содержащей круг $|z|\leqslant 1$ и $u(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots$. Положим $u(T)=c_0I+c_1T+\cdots+c_nT^n+\cdots$. Если $|u(z)|\leqslant 1$ для $|z|\leqslant 1$, то $\|u(T)\|\leqslant 1$ (Neuman J., Math. Nachr., 1951, **4**, 258 — 281; Heinz F., Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., 1952, IIa, 5—6). *М. С. Лившиц*

2627. О сопряженных конусах в гильбертовом пространстве. С. - Надь Б э л а, Усп. мат. наук, 1953, 8, № 5 (57), 167—168

В заметке Я. А. Тамаглицкого (Усп. мат. наук, 1952, 7, № 2 (48), 180—183) доказана теорема:

Пусть K — выпуклый (сильно) замкнутый конус в вещественном пространстве Гильберта H с вершиной в точке O и пусть R — множество таких элементов $r\in H$, что $(r,\ k)\geqslant 0$ для всех $k\in K$. Пусть элемент $a\in H$ — такой, что $(r,\ a)\geqslant 0$ для всех $r\in R$. Тогда $a\in K$.

Автор отмечает, что ранее (Sz.-Nagy Béla, Acta Sci. Math., Szeged, 1950, A12, 228—238, в особенности стр. 230) им была изложена указанная теорема и дано более простое доказательство, чем у Тамаглицкого. Приводится это доказательство.

Следует отметить, что эта теорема содержится в предложении М. Г. Крейна о том, что в рефлективном пространстве второй сопряженный конус совпадает с исходным конусом (Крейн М. Г., Рутман М. А., Усп. мат. наук, 1948, **3**, № 1 (23), 3—93, в особенности стр. 35). *Д. П. Мильман*

2628. Об оценке точности приближенных методов определения частот колебаний. С в и р с к и й И. В., Изв. Казанского фил. АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. н., 1953, № 3, 59—86

Предлагаются два способа аппроксимации снизу собственных чисел положительно определенного оператора H с дискретным спектром. Первый способ основан на допущении, что известен положительно определенный оператор $H_0<H$ также с дискретным спектром, причем собственные элементы φ_i и собственные числа λ_i^0 оператора H_0 предполагаются известными. Полагаем

$$H_1f=\lambda_m^0f+\sum_{i=1}^{m-1}(\lambda_i^0-\lambda_m^0)(f,\ \varphi_i)\varphi_i.$$

Тогда $0<H_1<H$ и оператор $H_2=H-H_1$ неотрицателен. Возьмем произвольные элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$; $g_1, g_2, \ldots, g_n$ и найдем наименьший неотрицательный оператор A_1, для которого $A_1f_k=g_k$. Такой оператор существует, если квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n}(g_i,\ f_k)a_ia_k$ неотрицательна; он имеет вид

$$A_1h=\sum_{i,k=1}^{n}g^{ik}(h,\ g_i)g_k,$$

где $\|g^{ik}\|$ — матрица, обратная матрице $\|(g_i,\ f_k)\|$. Выберем теперь $g_k=H_2f_k$ и положим

$$H_3f=\sum_{i,k=1}^{n}g^{ik}(f,\ g_i)g_k,$$

$H_4=H_1+H_3$. При этом $H_1<H_4<H$; собственные числа оператора H_4, которые находятся как корни некоторого алгебраического уравнения, аппроксимируют снизу собственные числа оператора H. Сходимость процесса не исследуется.

В качестве иллюстрации рассмотрены колебания струны, подверженной переменному натяжению, и некоторые другие примеры.

Второй способ отличается от первого тем, что автор пытается не задавать оператор H_0, а строить его. Пусть по методу Ритца получены приближенные значения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ и соответственно $\lambda_{1\tau}, \lambda_{2\tau}, \ldots, \lambda_{m\tau}$ первых собственных элементов оператора H и соответствующих им собственных чисел. Элементы φ_i можно считать ортонормированными. Самосопряженный оператор $H_0<H$ автор желает построить так, чтобы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ были первыми собственными элементами этого оператора, соответствующими заданным собственным числам λ_i^0, и предлагает такой способ построения:

Задаются числа $0<\lambda_1^0\leqslant\lambda_2^0\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m^0$ так, чтобы $\lambda_i^0<\lambda_{i\tau}$, и строится наименьший положительный оператор ΔH, переводящий элемент φ_i в элемент $g_i=H\varphi_i-\lambda_i^0\varphi_i$, $i=1, 2, \ldots, m$. Это возможно, так как $(g_i,\ \varphi_k)=0$, $i\neq k$, и $(g_i,\ \varphi_i)=\lambda_{i\tau}-\lambda_i^0>0$ и, следовательно, форма

$$\sum_{i,k=1}^{m}(g_i,\ \varphi_k)a_ia_k=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_{i\tau}-\lambda_i^0)a_i^2$$

— положительно определенная. Теперь автор полагает $H_0=H-\Delta H$. При этом, действительно, $H_0<H$ и φ_i есть собственный элемент оператора H_0, отвечающий собственному числу λ_i^0, но в общем случае λ_i^0, $i=1, 2, \ldots, m$, не суть первые собственные числа оператора H_0. Действительно, пусть λ_i — собственные числа оператора H. Так как метод Ритца дает приближение к собственным числам с избытком, то в общем случае $\lambda_i<\lambda_{i\tau}$ и можно найти такие λ_i^0, что $\lambda_i<\lambda_i^0<\lambda_{i\tau}$. Если бы при этом λ_i^0, $i=1, 2, \ldots, m$, были первыми собственными числами оператора H_0, то этот оператор имел бы соответственно бо́льшие собственные числа, чем превосходящий его оператор H. Таким образом, предлагаемый автором общий способ построения меньшего оператора с наперед известными первыми собственными числами и

собственными функциями неудовлетворителен. Автор указывает, что в статье Лемана (Lehmann N., Z. angew. Math. und Mech., 1949, 29, № 11—12, 341—356) дается другой метод оценки погрешности при вычислении собственных чисел.

С. Г. Михлин

2629. **О мультипликаторах в FL^p. Шварц** (Sur les multiplicateurs de FL^p. Schwartz Laurent), Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, 1953, 22, № 21, 5 (франц.)

На основании риссовской теории сопряженных функций доказывается, что операция, являющаяся по существу умножением на характеристическую функцию проективного полиэдра, непрерывна на FL^p.

Здесь FL^p — совокупность всех распределений, которые являются преобразованиями Фурье элементов пространства L^p над евклидовым пространством R^n, с индуцированной L^p нормой, а проективный полиэдр есть пересечение R^n с полиэдром в проективном пространстве, полученном из R^n присоединением гиперплоскости.

Если «проективный полиэдр» заменить «единичной сферой», то результат перестает быть справедливым при $n \geqslant 2$ и $p \geqslant 2n/(n-1)$ или $p < 2n/(n+1)$.

Сегал (I. E. Segal)

Из Math. Rev., 1953, 14, № 8, 767.

2630. **Структура максимальных идеалов в кольцах мер со сверткой. Шрейдер** (The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution. Šreĭder Y. A.), Amer. Math. Soc. Translation, № 81, 1953, 28 pp. (англ.)

Перевод из: Мат. сб., 1950, 27 (69), 297—318.

Из Math. Rev., 1953, 14, № 8, 768.

2631 Д. **О дифференциале функционала. Игнатьев У. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1953

2632 Д. **Шредингеровская форма релятивистски инвариантных уравнений для элементарных частиц и некоторые вопросы их физической интерпретации. Яппа Ю. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., ЛГУ, Л., 1953

См. также: 2532, 2587, 2614

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2633. **Вероятности в некоторых карточных играх с одним участником. Гринвуд** (Probabilities of certain solitaire card games. Greenwood Robert E.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 261, 88—93 (англ.)

Колода карт содержит k карт каждого из m возможных значений. Между двумя такими колодами устанавливается случайным образом взаимно однозначное соответствие. Изучается распределение вероятностей для числа пар карт одинакового значения. Капланский (Kaplansky I., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 906—914) получил довольно сложные общие формулы для этих вероятностей. Автор находит численные значения этих вероятностей для $k = 4$, $m = 13$ и сравнивает их с результатами проделанного им 1000 раз опыта.

Р. Л. Добрушин

2634. **О схеме урн Маркова. Нисневич Л. Б.**, Усп. мат. наук, 1953, 8, № 2 (54), 131—134

Автор рассматривает следующую урновую задачу. В урне находится $a_1, a_2, \ldots, a_m$ шаров соответственно 1-го, 2-го, ..., m-го цвета. Из урны извлекаются случайным образом шары, причем после каждого извлечения возвращают в урну вынутый шар и добавляют еще c шаров того же цвета, что и вынутый. При $m=2$ задача изучалась Марковым, Бернштейном и другими. Пусть $\mu_i^{(n)}$ — число шаров i-го цвета, извлеченных при n испытаниях, и пусть

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = P(\mu_1^{(n)} = k_1, \ldots, \mu_m^{(n)} = k_m).$$

Простым подсчетом находится точное выражение этой вероятности и затем при $k_i/n \to x_i$ $(n \to \infty;$ $i = 1, 2, \ldots, m)$ устанавливается, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{m-1} P_n(k_1, \ldots, k_m) = f(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= \Gamma\left(\frac{A}{c}\right) \prod_{i=1}^{m} \Gamma^{-1}\left(\frac{a_r}{c}\right) x_r^{(a_r/c)-1},$$

где $$A = a_1 + \cdots + a_m.$$

Далее приводятся некоторые очевидные свойства функции плотности $f(x_1, \ldots, x_m)$.

Рассмотренная автором задача приводится в качестве иллюстрации понятия класса эквивалентных величин, изученного в работе Е. Б. Дынкина (РЖМат, 1953, 827).

С. Х. Сираждинов

2635. **Некоторые оценки для конечных разрывных распределений. Ладегаст** (Einige Abschätzungen für endliche unstetige Verteilungen. Ladegast Konrad), Mitteilungsblatt Math. Statist., 1953, 5, 75—86 (нем.)

Пусть $\nu_r(a)$ означает абсолютный момент r-го порядка относительно точки a дискретной случайной величины, принимающей конечное число значений. Автор выводит некоторые неравенства чебышевского типа, содержащие $\nu_r(a)$. Следующее неравенство является типичным примером: пусть $0 < b_1 < b_2 < \max|x-a|$; тогда

$$(b_2^r - b_1^r) P\{|x-a| > b_2\} - b_1^r P\{|x-a| \leqslant b_1\} < \nu_r(a) - b_1^r.$$

Получены также соотношения между средним, медианой и модой распределения.

Номер (G. E. Noether)

Из Math. Rev., 1953, 14, № 8, 770.

2636. Функции распределения, содержащие нормальную компоненту. Поллард (Distribution functions containing a Gaussian factor. Pollard Harry), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 578—582 (англ.)

Для того чтобы закон распределения $F(x)$ содержал нормальную компоненту

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2}du,$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x)$ имела производные всех порядков и чтобы ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kF^{(2k+1)}(x)\frac{t^k}{4^kk!}$$

равномерно относительно $x(-\infty<x<+\infty)$ сходился к некоторой неотрицательной функции $p(x,t)$ при любом значении t $(0\leqslant t<1)$. *А. Я. Хинчин*

2637. Об усиленном законе больших чисел для зависимых величин. Бобров А. А., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **10**, № 1, 19—25

Пусть $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$—последовательность (вообще говоря—взаимно зависимых) случайных величин, $\sum_1^n\xi_k=s_n$, а $M\xi_n$ и $D\xi_n$ означают соответственно математическое ожидание и дисперсию величины ξ_n. Пусть $\alpha_h^{(n)}$ означает максимальное возможное уклонение от $M\xi_{n+h}$ условного математического ожидания величины ξ_{n+h}, вычисленного при заданных $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$; положим $\sup\alpha_h^{(n)}=\alpha_h$ $(h=1,\ 2,\ \ldots)$.

Теорема 1. Если 1) $\alpha_h\to0\ (h\to\infty)$, 2) $\sum_n D\xi_n/n^2<+\infty$ и 3) $\sum_n Ds_n/n^3<+\infty$, то последовательность $\{\xi_n\}$ подчиняется усиленному закону больших чисел.

Теорема 2 представляет собою простую перефразировку теоремы 1.

Теорема 3. Если все величины ξ_n распределены по одному и тому же закону, то для применимости усиленного закона больших чисел достаточна сходимость ряда $\sum_n\alpha_n/n$. *А. Я. Хинчин*

2638. Об одной асимптотической теореме для сумм малых случайных слагаемых. Гихман И. И., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **10**, № 1, 36—43

Предположим, что последовательные суммы

$$\zeta_0=\xi,\ \zeta_1=\xi+\xi_1,\ \ldots,\ \zeta_n=\xi+\xi_1+\ldots+\xi_n$$

данной последовательности случайных величин $\xi,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ образуют простую цепь Маркова и последовательность этих величин однородна в том смысле, что условное распределение ξ_k при заданной сумме $\zeta_{k-1}=s$ не зависит от k.

Пусть далее $f(\zeta)$ достаточно гладкая функция и

$$F_n(s)=M\{f(\zeta_n)/\zeta_0=s\}.$$

Предположим, что существуют условные моменты

$$\alpha_q(s,\ n)=M\{\xi_k^q/\zeta_{k-1}=s\}\qquad(q=1,\ 2,\ 3)$$

до третьего порядка и эти моменты допускают разложения

$$\alpha_1(s,\ n)=\frac{a(s)}{n}+\frac{\alpha_{13}(s)}{\sqrt{n^3}}+\frac{\psi_{13}(s,\ n)}{\sqrt{n^3}},$$

$$\alpha_2(s,\ n)=\frac{b(s)}{n}+\frac{\alpha_{23}(s)}{\sqrt{n^3}}+\frac{\psi_{23}(s,\ n)}{\sqrt{n^3}},$$

$$a_3(s,\ n)=\frac{\alpha_{33}(s)}{\sqrt{n^3}}+\frac{\psi_{33}(s,\ n)}{\sqrt{n^3}},$$

где $\psi_{i3}(s,\ n)\to0$ при $n\to\infty$, $i=1,\ 2,\ 3$; функции $\alpha_{i3}(s)$ ограничены и имеют производные до третьего порядка включительно, а функции $a(s)$, $b(s)$, $f(s)$ имеют непрерывные и ограниченные производные до седьмого порядка включительно. В указанных условиях

$$F_n(s)=v_0(0,\ s)+\frac{v_1(0,\ s)}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $v_0(t,\ s)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}+a(s)\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{2}b(s)\frac{\partial^2v}{\partial s^2}=0,\qquad(t\leqslant1)$$

удовлетворяющее условию $v_0(1,\ s)=f(s)$, а $v_1(t,\ s)$— решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}+a(s)\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{b(s)}{2}\frac{\partial^2v}{\partial s^2}=-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!}\alpha_{i3}(s)\frac{\partial^iv}{\partial s^i},$$

удовлетворяющее условию $v_1(1,\ s)=0$.

Могут быть получены и последующие члены разложения при усилении предположений о существовании моментов и дифференцируемости функций.

Метод доказательства — метод верхних и нижних функций, употребленный ранее в теории марковских процессов И. Г. Петровским, А. Н. Колмогоровым и А. Я. Хинчиным. *Б. В. Гнеденко*

2639. Закон повторного логарифма для однородных стохастических процессов с зависимыми приращениями. Дивеев Р. Х., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **10**, № 1, 44—47

Автор распространяет результаты Н. А. Сапогова о законе повторного логарифма для сумм зависимых величин (Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1950, № 19, 160—179) на стохастические процессы с непрерывным временем, $z(t)$, однородные в том смысле, что распределение $z(t+t_0)-z(t_0)$ не зависит от t_0. *Ю. В. Линник*

2640. Многомерная локальная теорема для предельных устойчивых распределений. Рвачёва Е. Л., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **10**, № 1, 106—121

В работе обобщаются результаты Б. В. Гнеденко (Усп. мат. наук, 1948, **3**, № 3,187—194; Докл. АН СССР, 1949, **66**, № 3,325—326; Украинский мат. ж., 1949, № 4, 3—15; Докл. АН СССР, 1950, **71**, 425—428), Д. Г. Майзлера, О. С. Парасюк и Е. Л. Рвачевой (Украинский мат. ж., 1949, **1**, 9—20), касающиеся локальной предельной теоремы для одномерных

устойчивых распределений и многомерного нормального распределения, на общий случай многомерных устойчивых распределений.

Пусть

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_s^{(n)}), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

— последовательность взаимно независимых, одинаково распределенных случайных s-мерных векторов, компоненты которых принимают только целочисленные значения. Предполагается, что закон распределения величин $\xi^{(n)}$ принадлежит области притяжения некоторого s-мерного устойчивого закона. Через $P_n(z)$ обозначим вероятность равенств

$$\sum_{m=1}^{n} \xi_i^{(m)} = z_i; \quad i = 1, 2, \ldots, s; \quad z = (z_1, \ldots, z_s).$$

Пусть

$$x_i = \frac{z_i - na_i^{(n)}}{B_n},$$

где $A_n = (a_1^{(n)}, \ldots, a_s^{(n)})$ и B_n выбираются так, чтобы функции распределения величин

$$\left(\left(\sum_{m=1}^{n} \xi_1^{(m)} - na_1^{(n)}\right)\Big/B_n, \ldots, \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_s^{(m)} - na_s^{(n)}\right)\Big/B_n\right)$$

сходились к предельному закону.

Распределение величин $\xi^{(n)}$ называется d-решетчатым, если общий наибольший делитель всех определителей порядка s, составленных из разностей координат точек, вероятности которых положительны, равен d. Основной результат работы формулируется следующим образом:

Теорема. Для того чтобы для случайных векторов $\xi^{(n)}$ последовательности (1) равномерно относительно z_i $(-\infty < z_i < \infty, i = 1, 2, \ldots, s)$ имело место соотношение

$$B_n^s P_n(z) - p(x) \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $x = \dfrac{z - nA_n}{B_n}$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) функция распределения величин $\xi^{(n)}$ принадлежала области притяжения устойчивого закона Φ с плотностью $p(x) = p(x_1, \ldots, x_s)$;

2) распределение величин $\xi^{(n)}$ было 1-решетчатым.

Предварительное сообщение о результатах работы опубликовано ранее (Докл. АН УССР, 1950, 3, 183—189). *Н. А. Сапогов*

2641. Закон повторного логарифма для процессов Маркова с конечным числом возможных состояний. Сарымсаков Т. А., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, 10, № 1, 13—18

Пусть $\{p_{ij}(t)\}$ — переходные вероятности однородного марковского процесса с конечным числом состояний $w_1, \ldots, w_n$ и пусть $w(t)$ — случайная функция, соответствующая этому процессу. Пусть $x(w)$ — функция на состояниях системы и случайная величина

$$U(T) = \int_0^T x(w(t))\, dt.$$

Пусть (условие V) для любой пары индексов i, j найдется t_{ij} такое, что $p_{ij}(t_{ij}) > 0$. Методом Дёблина доказывается, что если при $T \to \infty$ для величины $U(T)$ ее дисперсия $B(T) \to \infty$, то случайная величина $U(T)$ подчиняется при $T \to \infty$ закону повторного логарифма в его обычной формулировке.

Отметим, что ограничительное условие $B(T) \to \infty$ излишне, так как оно выполнено всегда, когда $x(w) \neq \text{const}$. Излишней является также и лемма 1 на стр. 14 (при ее доказательстве используется тот известный факт, что из условия V вытекает, что $p_{ij}(t) \neq 0$ при всех t; однако в таком случае утверждение леммы становится очевидным).

Автору, повидимому, неизвестна работа Дёблина (Doeblin W., Bull. Math. Soc. Roum. Sci., 1937, **39**, № 1, 57—115; № 2, 3—33), в которой доказывается, в частности, закон повторного логарифма для однородного марковского процесса с произвольным множеством состояний. *Р. Л. Добрушин*

2642. О предельных теоремах, связанных с понятием энтропии цепей Маркова. Юшкевич А. А., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 5 (57), 177—180

Математическим основанием теории информации в концепции Шеннона служат две предельные теоремы, связанные с энтропией H простой стационарной эргодической цепи Маркова с конечным числом состояний. Пусть $P\{C_s\}$ есть вероятность данной s-членной цепочки C_s состояний. Первая теорема утверждает, что $\lg P\{C_s\}/s$ стремится по вероятности к $-H$ при $s \to \infty$. Пусть $N_s(\lambda)$ — минимальное число s-членных цепочек, сумма вероятностей которых превосходит λ. Вторая теорема утверждает, что при $0 < \lambda < 1$ мы будем иметь $\lg N_s(\lambda) = sH + o(s)$. Обе теоремы подвергаются в статье существенным уточнениям, имеющим непосредственное значение для теории информации. Основными результатами являются следующие две теоремы:

Теорема 1. При $s \to \infty$ закон распределения величины

$$\frac{\lg P\{C_s\} + sH}{\sqrt{s}},$$

стремится к нормальному закону с дисперсией, зависящей только от матрицы переходных вероятностей данной цепи Маркова.

Теорема 2. $\lg N_s(\lambda) = sH + l\sqrt{s} + o(\sqrt{s})$, где $0 < \lambda < 1$ и постоянная l зависит только от λ и матрицы переходных вероятностей данной цепи Маркова. *А. Я. Хинчин*

2643. Однородные марковские процессы пятого типа (бесконечное счетное число возможных состояний; непрерывный параметр). Леви (Processus markoviens et stationnaires du cinquième type (infinité dénombrable d'états possibles, paramètre continu. Lévy Paul), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 17, 1630—1632 (франц.)

Пусть случайная функция $H(t)$, принимающая натуральные значения, соответствует однородному

марковскому процессу со счетным числом состояний. Пусть T_n — множество (очевидно, случайное) точек $t \in [0, 1]$ таких, что $H(t) = n$. В своих предыдущих работах (Ann. scient. École Norm. super., 1951, 68, 327—351; 1952, 69, 203—212) автор дал классификацию таких процессов в зависимости от структуры множеств T_n и подробно изучил различные типы вырожденных процессов. В частности, к пятому типу им были отнесены процессы, для которых функция $H(t)$ с вероятностью 1 измерима и, хотя бы для одного состояния с номером n_0, отлична от нуля вероятность того, что T_{n_0} имеет положительную меру, но не содержит в себе ни одного интервала.

В реферируемой заметке продолжается изучение процессов пятого типа. Приводится трансфинитная конструкция, позволяющая приписать каждому процессу некоторое трансфинитное число — его порядок. Изучается поведение функции $H(t)$ (например, показывается, что с вероятностью единица существует не более чем счетное число точек, принадлежащих более чем одному из множеств $\overline{T}_n$, где $\overline{T}_n$ — замыкание T_n).

Некоторые построения автора референту представляются недостаточно ясными. *Р. Л. Добрушин*

2644. Общая теория корреляции случайных функций. Пугачев В. С., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 5, 401—420

Дается обзор общей теории произвольных (вообще говоря, нестационарных), случайных функций, оперирующей лишь с моментами первого и второго порядков (корреляционная теория). После формулировки основных определений и перечисления простейших теорем, касающихся условий непрерывности в среднем квадратичном случайных функций и условий сходимости (в том же смысле) последовательностей таких функций, подробно рассматривается разложение произвольной случайной функции $X(t)$ и ее корреляционной функции $K(t, s)$ в ряд по собственным функциям ядра $K(t, s)$ (с произвольным весом $\Phi(t)$).

Далее, строится более общая теория канонических разложений случайных функций — разложений по системе функций $u_r(t)$, $r = 1, 2, \ldots$, выбранной так, чтобы коэффициенты разложения были некоррелированными случайными величинами; указывается, как практически осуществляется такое каноническое разложение с требуемой в данной задаче точностью. Полученные общие результаты прилагаются к векторным случайным функциям и к стационарным случайным процессам; в последнем случае теория канонических разложений используется для вывода известного спектрального разложения таких процессов.

В последней части статьи приводятся формулы, определяющие математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции, получаемой из данной $X(t)$ (первые два момента которой считаются известными) при помощи линейного преобразования общего вида, а также формулы для произвольных моментов функции, получаемой из $X(t)$ при помощи некоторых нелинейных преобразований (в эти формулы, естественно, входят уже все моменты функции $X(t)$); здесь же рассматривается применение теории канонических разложений к приближенному решению некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих случайные функции (в приближении, опирающемся на линеаризацию уравнений). *А. М. Яглом*

2645. О разложениях Фурье стационарных случайных процессов. Дейвис (On the Fourier expansion of stationary random processes. Davis R. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 564—569 (англ.)

Коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \exp\left[-2\pi i n \frac{t}{T}\right] dt \quad (-\infty < n < +\infty)$$

стационарного случайного процесса $x(t)$ на практике часто предполагаются взаимно некоррелированными случайными величинами. В статье показывается, что если хотя бы для одной пары n, m положительных индексов ($n \neq m$) пары (c_n, c_m) и (c_n, c_{-m}) некоррелированы при любом $T > 0$, то в случае непрерывной корреляционной функции $R(t)$ мы имеем дело с тривиальным процессом $R(t) \equiv 1$. *А. Я. Хинчин*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

2646. Общее рекуррентное соотношение для ортогональных полиномов, определяемых пирсоновскими вероятностными функциями. Басоне (Ecuacion general de recurrencia de los polinomios ortogonales con las funciones de probabilidad pearsonianas. Basone Nelly), An. Soc. cient. Argentina, 1953, **155**, № 1, 3—10 (исп.)

Пусть $p(x)$ — плотность распределения, определяемая уравнением Пирсона

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} = \frac{T_1(x)}{T_2(x)}.$$

Для системы полиномов $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$, определяемых из соотношения

$$\frac{d^n}{dx^n}[p(x) T_2^n(x)] = p(x) X_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

доказывается свойство ортогональности и между полиномами X_n, X_{n-1}, X_{n-2} ($n = 2, 3, \ldots$) устанавливается общее рекуррентное соотношение. В качестве иллюстрации приводятся рекуррентные соотношения для классических полиномов Лагерра, Эрмита и Якоби. *С. Х. Сираждинов*

2647. Об изменчивости средних. Гофман (Note on the variation of means. Goffman Casper), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 307—309 (англ.)

В качестве меры изменчивости средних значений $\mu_1, \ldots, \mu_n$ независимых случайных величин $x_1, \ldots, x_n$ с единичной дисперсией рассматривается функция $f(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — непрерывная, неотрицательная, инвариантная относительно сдвига начала отсчета на оси μ и обращающаяся в нуль тогда и только тогда, когда все ее аргументы имеют одинаковые значения.

Пусть эта функция обладает также свойствами: 1) для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|\mu_i - \mu_j| < \varepsilon$ при любых i, j, если $f(\mu_1, \ldots, \mu_n) < \delta$; 2) если x_i и x_i', $i = 1, \ldots, n$,—нормальные случайные величины со средними значениями соответственно μ_i и μ_i' и единичными дисперсиями и если $f(\mu_1, \ldots, \mu_n) = f(\mu_1', \ldots, \mu_n')$, то случайные величины $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $f(x_1', \ldots, x_n')$ имеют одинаковые распределения вероятностей. Доказывается, что тогда $f(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ есть функция лишь от

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \right)^2$$

А. С. Монин

2648. Изучение предельных закономерностей для вариационного ряда. Мейзлер Д. Г., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **10**, № 1, 96—105

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с законами распределения соответственно $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$

Пусть далее

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\overline{\eta}_n = \frac{\eta_n - b_n}{a_n},$$

где $a_n > 0$ и b_n — вещественные константы.

Ищется характеристический признак распределений $\Phi(x)$, являющихся предельными для

$$\Phi_n(x) = P(\overline{\eta}_n < x) = \prod_{k=1}^{n} F_k(a_n x + b_n) \text{ при } n \to \infty.$$

Вводятся следующие определения и обозначения:

1. Функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу G, если существует такая последовательность функций распределения $F_k(x)$ и такие вещественные константы $a_n > 0$ и b_n, что

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} F_k(a_n x + b_n) = \Phi(x)$$

для всех x, для которых $\Phi(x) > 0$ и равномерно относительно k $[1 \leqslant k \leqslant n]$.

$$\lim_{n\to\infty} F_k(a_n x + b_n) = 1.$$

2. Через G^* обозначается класс распределений, соответствующих случаю $a_n = 1$.

3. В случае $b_n = 0$ необходимо, чтобы или $\Phi(0) = 0$ или $\Phi(0) = 1$. Через G^+ и G^- обозначаются классы распределений, соответствующих случаям $b_n = 0$, $\Phi(0) = 0$ и $b_n = 0$, $\Phi(0) = 1$.

4. Функция распределения $\Phi(x)$ принадлежит классу $\overline{G}^+$, соответственно $\overline{G}^-$, если функция распределения $\overline{\Phi}(x) = \Phi(x + b)$, где b — вещественное число, принадлежит классу G^+, соответственно G^-.

Доказывается, что для того чтобы функция распределения $\Phi(x)$ принадлежала классу G^*, необходимо и достаточно, чтобы $\ln \Phi(x)$ являлась выпуклой функцией в промежутке (x_0, ∞), где $x_0 = \inf_x E\{\Phi(x) > 0\}$; для того чтобы функция распределения $\Phi(x)$ принадлежала классу G^+, соответственно G^-, необходимо и достаточно, чтобы $\ln \Phi(e^x)$, соответственно $\ln \Phi(-e^{-x})$, являлась выпуклой функцией в промежутке (x_0, ∞).

Указывается, что класс G исчерпывается распределениями классов G^* и $\overline{G}^-$. *С. Х. Туманян*

2649. Точная оценка дисперсии и смешанных вторых моментов упорядоченных статистик в выборках из распределения «крайних значений». Либлейн (On the exact evaluation of the variances and covariances of order statistics in samples from the extreme-value distribution. Liblein Julius), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 282—287 (англ.)

Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ — упорядоченная последовательность результатов n независимых наблюдений над случайной величиной, распределенной по закону $F(x) = \exp\{e^{-x}\}$. В статье вычисляются моменты Mx_i^k и $Mx_i x_j$. *Б. В. Гнеденко*

2650. Распределение общего числа серий в выборке из пуассоновской совокупности. Синха (Distribution of total number of runs in samples from Poisson population. Sinha P.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1953, **4**, № 16, 171—172 (англ.)

2651. Выборочная характеризация нормального распределения. Смирнова Е. Н., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **10**, № 1, 131—140

Автор дает доказательство методом моментов теоремы о том, что из независимости выборочных средней и дисперсии следует нормальность генеральной совокупности. При этом предполагается, что существует второй момент генеральной совокупности. Эта теорема была доказана ранее методом характеристических функций Лукачем (Lukacs E., Ann. Math. Statistics, 1942, **13**, 91—93). Доказательство автора дефектно. Не установлено, что из существования второго момента следует существование всех моментов генеральной совокупности, так как при доказательстве этого факта автором допущены следующие ошибки:

1 (стр. 132). Из независимости $x_1 + x_2$ и $(x_1 - x_2)^2$ не следует независимость $f_n(x_1 + x_2)$ и $f_n(x_1 - x_2)$, где $f_n(x) = x$, если $|x| \leqslant n$, и $f_n(x) = 0$, если $|x| > n$. Автор пользуется этой независимостью.

2 (стр. 133). При доказательстве существования всех моментов μ_k генеральной совокупности автор проводит индукцию от $4k$ к $4k + 2$ и не проводит индукции от $4k + 2$ к $4k + 4$. При этом рассуждения автора применимы к индукции от $4k + 2$ к $4k + 4$ и не применимы к индукции от $4k$ к $4k + 2$.

В более общих условиях (без наложения каких-либо ограничений на распределение генеральной совокупности) эта теорема доказана А. А. Зингером (Усп. мат. наук, 1951, **6**, 172—175).

Б. А. Севастьянов

2652. Условия независимости линейных и квадратичных линейных и билинейных форм. Кама-

лов М. К., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, 10, № 1, 86—95

Рассматривается повторная выборка $x_1, \ldots, x_n$ из нормальной совокупности со средним 0 и данной дисперсией. Пусть дана система k линейных и m квадратичных форм от $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами. Дается необходимое и достаточное условие независимости этих систем при помощи вспомогательной квадратичной формы от n переменных. Далее изучаются аналогичные условия для независимости систем линейных и билинейных статистик.

Полученные результаты обобщают некоторые исследования Эйткена (Aitken A. C., Proc. Roy. Soc. Edinb., 1940, 60, 40—46) и В. И. Романовского (Основные задачи теории ошибок, Гостехиздат, М.— Л., 1947). *Ю. В. Линник*

2653. Заметка о пуассоновском индексе дисперсии. Катхиргаматамби (Note on the Poisson index of dispersion. Kathirgamatamby N.), Biometrika, 1953, 40, № 1—2, 225—228 (англ.)

Над случайной величиной, принимающей только целочисленные неотрицательные значения, произведены независимые случайные наблюдения, в результате которых она приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Величина

$$I = \frac{1}{\bar{x}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

называется индексом Пуассона. Для оценки гипотезы принадлежности распределения к тому или иному типу рассматривается выражение вида

$$P\{I > Z^2_{n,\alpha}\} =$$

$$= P\left\{S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 - Z^2_{n,\alpha}\bar{x} > 0\right\} = \alpha,$$

где α—заданное число. Для величины S найдены первые четыре момента. Специально записаны четыре первых момента для распределения Пуассона. Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ приведены краткие таблицы. *Б. В. Гнеденко*

2654. Об одном способе построения доверительных областей для нормальной функции распределения. Смирнов Н. В., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, 10, № 1, 122—130

Пусть произведена выборка объема n из нормальной генеральной совокупности с неизвестными значениями параметров m и σ.

Рассматривается величина

$$L_n(\bar{x}, s) = \max_{-\infty<x<\infty} |F^*_n(x) - F(x)|,$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

$$F^*_n(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

а $\bar{x}$ и s означают соответственно среднее арифметическое и среднее квадратическое уклонение в выборке.

Пусть

$$P_n(\lambda) = P\left\{L_n(\bar{x}, s) < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Доказывается, что

$$P(\lambda) = \lim_{n\to\infty} P_n(\lambda) =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \exp\{-\lambda^2 \pi \cos^{-2}\varphi \cdot \exp(\operatorname{tg}\varphi)\}\, d\omega,$$

где

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{\sin\omega}{\sqrt{2}}\right).$$

Приводится таблица значений $P(\lambda)$.

Полученные результаты дают возможность:

1) проверить гипотезу H_0, состоящую в том, что нормальная совокупность распределена по нормальному закону с данными значениями параметров $\bar{x}$ и s;

2) определить доверительную область для нормальной функции распределения по данным выборки. *С. Х. Туманян*

2655. Асимптотические доверительные интервалы для значений плотности вероятности в 100 p процентных точках. Уолш (Large sample confidence intervals for density function values at percentage points. Walsh John E.), Sankhyá, 1953, 12, № 3, 265—276 (англ.)

Пусть производится выборка из совокупности с неизвестной плотностью распределения $f(x)$. Пусть далее θ_p есть 100 p процентная точка этой совокупности. Устанавливаются в случае достаточно больших выборок и для «достаточно хороших» плотностей $f(x)$ доверительные интервалы для $f(\theta_p)$. *С. Х. Туманян*

2656. Нелинейная функциональная зависимость между двумя переменными, когда одна переменная принимает заранее фиксированные значения. Гири (Non-linear functional relationship between two variables when one variable is controlled. Geary R. C.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 261, 94—103 (англ.)

Пусть переменные величины u и v связаны соотношением

$$v = \alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3,$$

где $\alpha, \beta, \ldots$ — неизвестные коэффициенты. Ставится задача оценки этих коэффициентов по ряду наблюденных значений

$$(x_i, y_i),\ x_i = u_i + e_i \text{ и } y_i = v_i + f_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

где x_i — заранее фиксированные числа, а e и f — случайные величины, не зависящие друг от друга,

а также от x и v. В работе даются оценки неизвестных коэффициентов и дисперсии этих оценок для случая, когда

$$Me = Me^3 = Mf = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{2k-1} = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

и для каждого фиксированного x_i имеется несколько наблюденных значений y_i. Полученные оценки для γ и δ совпадают с известными оценками по способу наименьших квадратов. Что же касается оценок для α и β, то они совпадают с соответствующими оценками по способу наименьших квадратов только в том случае, когда $Me^2 = 0$. Метод оценки неизвестных коэффициентов $\alpha, \beta, \ldots$ легко распространяется на многочлены четвертой степени и выше. *Л. Н. Большев*

2657. Прямая наилучшего среднего квадратического приближения. Бейкон (The «best» straight line among the points. Bacon Ralph Hoyt), Amer. J. Phys., 1953, **21**, № 6, 428—446 (англ.)

Излагаются различные применения способа наименьших квадратов для построения линейных эмпирических формул по результатам наблюдений. В приложении дается теоретико-вероятностное обоснование излагаемых методов. *Л. Н. Большев*

2658. К вопросу применения математической статистики при обработке результатов измерений существенно-положительных величин. Комаров А. Д., Тр. Ленингр. инж.-экономич. ин-та, 1953, № 6, 218—225

Рассматривается случайная величина $\eta = |\xi|$, где ξ распределена нормально с неизвестными параметрами a и σ. Для оценки этих параметров по n независимым наблюдениям случайной величины η применяется метод моментов. К работе приложена таблица, облегчающая отыскание таких оценок. *Л. Н. Большев*

2659. Оценка параметров совокупностей III-го типа из усеченных выборок. Дес Радж (Estimation of the parameters of type III populations from truncated samples. Des Raj), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 262, 336—349 (англ.)

Для совокупности III-го типа плотность распределения имеет вид

$$\frac{c}{\sigma}\left[1 + \frac{\alpha_3}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{(4/\alpha_3^2)-1} \exp\left\{-\frac{2}{\alpha_3}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\},$$

где c — постоянная,

$$\mu - \frac{2\sigma}{\alpha_3} \leqslant x < \infty.$$

Рассматривается проблема оценки среднего значения μ и дисперсии σ^2 этой совокупности при помощи выборки, усеченной с одной или двух сторон, причем разбираются случаи, когда третий момент α_3 известен и неизвестен.

Проблема решается в различных предположениях относительно известности или неизвестности числа наблюдений, не входящих в усеченную выборку. Оценка параметров производится как методом моментов, так и методом максимума правдоподобия. *С. Х. Туманян*

2660. Об оценке параметров двумерных нормальных совокупностей по выборкам, линейно усеченным с одной или с двух сторон. Дес Радж (On estimating the parameters of bivariate normal populations from doubly and singly linearly truncated samples. Des Raj), Sankhyá, 1953, **12**, № 3, 277—290 (англ.)

Рассматривается проблема оценки параметров двумерного нормального распределения посредством выборки, линейно усеченной с одной или с двух сторон, причем разбираются случаи, когда известно и неизвестно число наблюдений, не входящих в усеченную выборку. Оценка параметров производится методом максимума правдоподобия и методом моментов.

Показывается, что оба метода дают одни и те же результаты. *С. Х. Туманян*

2661. Построение делимых групп в системе опытов с некомплектными блоками. Бос, Шрикханде, Бхаттачария (On the construction of group divisible incomplete block designs. Bose R. C., Shrikhande S. S., Bhattacharya K. N.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 167—195 (англ.)

Рассматриваются особые системы постановки массовых экспериментов (агротехнических, генетических, производственных и т. п.), получившие название систем делимых групп вариантов при некомплектных блоках.

Статья примыкает к исследованию Босе и Шимамото (Bose R. C., Shimamoto T., J. Amer. Statist. Assoc., 1952, **47**, 151—184) и Босе, Коннора (Bose R. C., Connor W. S., Ann. Math. Statistics, 1952, **23**, 367—383) о комбинаторных свойствах делимых групп. В работе даются приемы построения делимых групп при различных числах вариантов опытов. *Н. В. Смирнов*

2662. Таблицы сопряженности признаков и приближенные χ^2-распределения. Фог (Contingency tables and approximate χ^2-distributions. Fog David), Math. scand., 1953, **1**, № 1, 93—103 (англ.)

В случае многомерных таблиц контингенции критерий χ^2, используемый для проверки гипотезы независимости, представляет сумму квадратов нормированных уклонений численностей отдельных клеток от их математических ожиданий при данной гипотезе. Показывается, что критерий χ^2 можно представить также в виде суммы квадратов взаимно ортогональных нормированных линейных форм от тех же уклонений; эти формы имеют среднее значение, равное нулю, нулевые ковариации и дисперсии, стремящиеся к единице при возрастании объема выборки. Распределение этих форм приближенно нормально. *Н. В. Смирнов*

2663. Испытание функции распределения. Ван-дер-Варден (Testing a distribution function. Van der Waerden B. L.), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 3, 201—207; Indagationes math., 1953, **15**, № 3, 201—207 (англ.)

Пусть $F(t)$ и $F_n(t)$ — теоретическая, соответственно эмпирическая, построенная по выборке объема

n, функции распределения; Δ — верхняя граница разности $F(t) - F_n(t)$. Доказывается, что при $0 < \varepsilon < 1$ имеет место равенство ($H = [n(1-\varepsilon)]$),

$$Q = P\{\Delta > \varepsilon\} =$$

$$= \varepsilon \sum_{h=0}^{H} \binom{n}{h} \left(1 - \varepsilon - \frac{h}{n}\right)^{n-h} \left(\varepsilon + \frac{h}{n}\right)^{h-1},$$

выражающее закон распределения Δ, не зависящий от вида непрерывной функции $F(t)$. Эта формула была впервые установлена референтом (Усп. мат. наук, 1944, 10, 179—206) и позднее Бернбаумом и Тинги (Bernbaum Z. W., Tingey F. H., Ann. Math. Statistics, 1951, 22, 592).

Исследуя мощность Δ-критерия, автор применяет его к случаю, когда при нулевой гипотезе распределение нормально с центром $\mu = 0$ и дисперсией $\sigma^2 = 1$; альтернативными гипотезами служат при этом предположения $\mu > 0$, $\sigma^2 = 1$. Обнаруживается, что применение в этом частном случае критерия Δ связано с значительной потерей мощности по сравнению с классическим приемом проверки. Автор подчеркивает условность проведенного им сравнения. *Н. В. Смирнов*

2664. Об оценке принадлежности случайной выборки к непрерывному распределению. Романовский В. И., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **11**, 12—15

Пусть $F(x)$ — непрерывная функция распределения и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты независимых наблюдений над случайной величиной ξ. Требуется проверить гипотезу, что $F(x)$ является функцией распределения ξ.

Предлагается следующий прием для оценки согласия гипотезы с опытом. Величины $p_i = F(x_i)$, как известно, равномерно распределены в (0,1). Рассматривается величина

$$R = \max_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (p_i - p_j)$$

(ранг, размах, широта). Ее распределение в указанном предположении

$$P\{R < r\} = nr^{n-1} - (n-1)r^n \qquad (1)$$

не зависит от распределения $F(x)$. Пусть события с вероятностями не большими α приняты практически невозможными. Тогда, если окажется, что

$$nR^{n-1} - (n-1)R^n \leqslant \alpha, \qquad (2)$$

где R обозначает фактически наблюденное значение размаха p_i, то естественно проверяемую гипотезу отбросить.

Приводится небольшая таблица (с шестью знаками) функции распределения (1), а также рассмотрены в качестве иллюстрации два примера.
Б. В. Гнеденко

2665. Простые приближения и номограммы для использования ранговых критериев проверки. Рейкорт, Уайз (Simple approximations and nomograms for two ranking tests. Rijkoort P. J., Wise M. E.), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 3, 294—302; Indagationes math., 1953, **15**, № 3, 294—302 (англ.)

Для распределения рангового критерия W Кендалла (Kendall M. G., Rank correlation methods, London, 1948), служащего показателем согласованности m различных упорядочиваний k отдельных объектов, автор находит приближенное выражение при помощи бэта-распределения, построенного по найденным моментам. Построены номограммы для уровней значимости от 1% до 10%. Аналогичное исследование проведено для обобщенного критерия Уилкоксона. *Н. В. Смирнов*

2666. Ошибки округления. Эйдельнант М. И., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **11**, 63—68

Показывается, что ошибки округления, возникающие при замене исходного ряда измерений случайной величины центрами классовых промежутков, при достаточно малой ширине последних, можно считать распределенными приближенно равномерно в этих промежутках.

Для оценки ошибок среднего арифметического и дисперсии используется неравенство Бернштейна, уточняющее классическое неравенство Чебышева. *Н. В. Смирнов*

2667. Смысл закона средней. Ястремский Б. С., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **10**, № 1, 148—158

2668. Список работ В. И. Романовского. Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **10**, № 1, 5—12

2669. Об одной задаче В. И. Романовского (В связи с ее применением к вопросам экономической статистики). Конюс А. А., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, **10**, № 1, 81—85

2670. О некоторых статистических формулах. Холдейн (On some statistical formulae. Haldane J. B. S.), Sci. and Culture, 1953, **18**, № 12, 598 (англ.)

Приводятся без доказательства приближенные формулы для логарифмов нормального распределения, распределения χ^2, распределения Стьюдента, благодаря которым таблицы, обычно используемые в статистике для ряда критериев значимости, могут быть заменены таблицами десятичных логарифмов. Ошибка, допускаемая при этом, не превышает 4%. *С. Х. Туманян*

2671 К. Начальный учебник по статистике. Дейвид (A statistical primer. David F. N., X+226, pp. tables, Charles Griffen, London, 22 s.), Bull. Brit. Scient. Instrum. Res. Assoc., 1953, 8, № 9, 267 (библ.)

2672 К. Сборник статей по теории игр. Т. 2. Кун, Таккер (Contributions to the theory of games. vol. 2. Kuhn Harry Waldo, Tucker Albert William, pp. 395, Princeton University Press, 4.00 doll.), U. S. Quart. Book Rev., 1953, 9, № 2, 237 (библ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

2673. Отношение выходного сигнала к шуму для схемы, работающей по степенному закону. Блакман (The output signal-to-noise ratio of a power-law device. Blachman Nelson M.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 6, 783—785 (англ.)

Рассмотрен эффект прохождения через схему, работающую по степенному закону, синусоидального сигнала с шумом, частотный спектр которого близко прилегает к частоте сигнала. Предполагается, что выходное напряжение схемы равно au^n (соответственно нулю), если входное напряжение u положительно (отрицательно). Получено отношение R' мощностей выходного сигнала к выходному шуму в окрестности m-й гармоники в зависимости от отношения R мощностей входного сигнала к входному шуму. Общее выражение $R'(R)$ содержит гипергеометрические функции, однако для больших R получается приближенное равенство $R'(R) \cong \cong 2R/(m^2+n^2)$. Для малых R получается:

$$R'(R) \cong \begin{cases} \Gamma^2\left(\frac{m+n}{2}+1\right)R^m / (m!)^2\,\Gamma(n+1) \quad (m>0), \\ \Gamma^2\left(\frac{1}{2}n+1\right) \Big/ \left[\Gamma(n+1) - \Gamma^2\left(\frac{1}{2}n+1\right)\right] \\ \qquad (m=0). \end{cases}$$

Н. А. Бразма

2674. Интерференционный способ измерения коэффициентов корреляции стационарных шумов. Гершман С. Г., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 1, 33—35

Описывается устройство для измерения величины

$$\overline{[S(t)+S(t+\tau)]^2} = 2B[1+R(\tau)],$$

где $S(t)$ — электрическое напряжение, представляющее стационарный случайный шум, черта сверху служит символом осреднения, $B = \overline{[S(t)]^2}$ и $R(\tau)$ — нормированная корреляционная функция случайного процесса $S(t)$. Устройство включает «элемент задержки», позволяющий получить сдвиг во времени на переменный интервал τ. Приводятся результаты измерений функции $R(\tau)$ для случая «белого шума», пропущенного через полосовой фильтр; эти результаты согласуются с теорией в той степени, какой можно ожидать, учитывая отклонение характеристик реальных фильтров от тех, которые предполагаются при расчете. *А. М. Яглом*

2675. Браковка по сортам. Дивеев Р. Х., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, 11, 69—73

Рассматривается один из вариантов приемочного контроля по качественному признаку, когда в зависимости от результатов выборочных испытаний предъявленные к приемке партии изделий сортируются на два или три сорта. Даются оценки сверху для вероятностей ошибок первого, второго и третьего рода, а также для среднего выходного качества и объема инспекции.

Следует отметить, что в заметке употребляется ряд излишних обозначений и понятий. Например, вероятность p_2 не имеет никакого смысла и нигде в вычислениях не используется. Матрица, названная характеристикой производства, на самом деле характеризует не производство, а данную партию и метод контроля, так как входящие в эту матрицу вероятности существенно зависят от объема партии и выбранного варианта приемочного контроля. *Л. Н. Большев*

2676. Теория метода группировки. Егудин Г. И., Тр. Ин-та мат. и механики АН Узб. ССР, 1953, 10, № 1, 48—61

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n независимых наблюдений случайной величины ξ с плотностью $f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, зависящей от m неизвестных параметров a_i. Предположим, что интервал изменения x разбит на k непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ $(k > m)$, и пусть n_j — число наблюдений, попавших в интервал Δ_j. Ставится задача оценки неизвестных параметров a_i по наблюденным частотам n_j/n. Известно, что метод наибольшего правдоподобия дает в этом случае асимптотически эффективные и асимптотически нормальные оценки, однако решение уравнения правдоподобия сопряжено обычно с большими трудностями. Желательно иметь более простые оценки, обладающие асимптотическими свойствами оценок наибольшего правдоподобия.

Рассматривается случай, когда 1) величина ξ распределена нормально с неизвестными параметрами (a, σ), 2) число интервалов группирования $k = 3$ и 3) в качестве оценок (a^*, σ^*) выбирается решение системы уравнений

$$\int_{\Delta_1} f(x, a^*, \sigma^*)\,dx = \frac{n_1}{n}, \quad \int_{\Delta_3} f(x, a^*, \sigma^*)\,dx = \frac{n_3}{n}.$$

Доказывается, что такие оценки (a^*, σ^*) являются состоятельными, асимптотически эффективными и асимптотически нормальными.

Следует отметить, что практически удобные методы получения оценок с указанными свойствами для произвольной дифференцируемой плотности $f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и при любом числе интервалов k даны Нейманом (Neyman J., Proceedings of the Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, University of California Press, 1949, 239—275). *Л. Н. Большев*

2677. Обобщенная задача о разыскании вероятности попадания в цель с гауссовой мишенью. II. Фрейзер (Generalized hit probabilities with a Gaussian target. II. Fraser D. A. S.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 2, 288—298 (англ.)

Излагаются приложения результатов предыдущей статьи автора (Ann. Math. Statistics, 1951, 22, № 2, 248—255) к задаче определения вероятности по меньшей мере одного попадания в цель. Для случая пяти выстрелов в цель приведены числовые расчеты и таблицы. В последнем разделе приведены приближенные методы вычисления указанной вероятности в предположении, что степень связи между результатами последовательных выстрелов зависит только от величины промежутка времени между ними и что горизонтальная и вертикальная составляющие имеют одинаковые распределения. *Б. В. Гнеденко*

2678. Опыт применения методов математической статистики к изучению пористости лессов. Кригер Н. И., Емельянова Е. В., Материалы по инженерной геологии, Металлургиздат, 1953, № 3, 69—95

Кратко освещены основные понятия и методы математической статистики. Исследование большого материала обнаруживает, что распределение пористости в лессовых породах и распределение лессовых фракций приближенно следуют нормальному закону. Оцениваются параметры этих распределений. Между пористостью и количеством фракций существует слабо выраженная корреляция: $r = 0{,}23 \pm 0{,}03$. Анализируются зависимость коэффициента макропористости при разных нагрузках от начальной пористости (без нагрузки) и другие зависимости. *Н. В. Смирнов*

2679. О применимости многофакторных эмпирических формул в технологической практике. Добычин В. П., Науч.-исслед. тр. Центр. н.-и. ин-та лубяных волокон, 1953, 7, 3—36

Рассматриваются методологические вопросы, возникающие при построении, проверке и использовании эмпирических формул, выражающих многофакторные зависимости в технологии. *Н. В. Смирнов*

2680. О неровноте льняной пряжи из смесок. Лазарева С. Е., Науч.-исслед. тр. Центр. н.-и. ин-та лубяных волокон, 1953, 7, 36—82

Технологическое исследование, использующее статистические методы для анализа неровноты пряжи из смесок. *Н. В. Смирнов*

2681 К. Статистические методы при экспериментировании. Введение. Лейси (Statistical methods in experimentation. An introduction. Lacey Oliver L., XI+249 pp., ills, Macmillan, New York, 1953, 4.50 doll.), Scient. Monthly, 1953, 77, № 2, VII (библ.)

См. также: 2468, 2474, 2476, 2477

ГЕОМЕТРИЯ

2682. Об изополюсе. Гурматай (Sur l'isopôle. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1953, 62, 34—38 (франц.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 785.

2683. Элементарное доказательство конфигурации пятнадцати кругов Стефаноса. Бакс (Démonstration élémentaire de la configuration des quinze cercles de Stephanos. Backes F.), Mathesis, 1953, 62, 12—14 (франц.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 785.

2684. О гексагональном замыкании. Алем (Sur une fermeture hexagonale. Alaime R.), Mathesis, 1953, 62, 30—33 (франц.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 785.

2685. Деление дуг и углов на произвольное число равных частей. Кокаиа (რკალებისა და კუთხეების დაყოფანებისმიერი რაოდენობის თანატოლ ნაწილებად. კოკაია ვ.), მეცნიერება და ტექნიკა (Мецниереба да техника), 1953, № 6, 25—29 (груз.)

2686. Об эллипсе Штейнера через торричеллиевы сегменты. Кавалларо (Sur l'ellipse de Steiner par les segments torricelliens. Cavallaro Vincenzo G.), Mathesis, 1953, 62, 21—30 (франц.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 785.

2687. Общее коническое сечение. Гупта (The general conic. Gupta Hansraj), Math. Student, 1953, 21, № 1—2, 55—59 (англ.)

Исследование кривой 2-го порядка по ее общему уравнению элементарными методами аналитической геометрии.

2688. Кинематика твердых тел. Иглиш, Тиц (Die Kinematik des starren Körpers. Iglisch Rudolf, Tietz Horst), Math.-Phys. Semesterber., 1953, 3, 87—89 (нем.)

Методами векторной алгебры выводится уравнение Эйлера в кинематике.

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 7, 694.

2689. Свойство угла Брокарда в треугольнике. Перисастри (A property of the Brocard angle of a triangle. Perisastri M.), Math. Student, 1953, 21, № 1—2, 59 (англ.)

Брокардов угол ω треугольника, определяемый уравнением $\operatorname{ctg}\omega = (a^2 + b^2 + c^2)/4\Delta$, где Δ — площадь и a, b, c — стороны треугольника, не превышает 30° и достигает этого максимума только для равностороннего треугольника.

2690. Рациональные треугольники, близкие равносторонним, и пифагоровы треугольники, близкие равнобедренным. Баге (Nahezu gleichseitige rationale und nahezu gleichschenklige pythagoreische Dreiecke. Waage E.), Elem. Math., 1953, 8, № 5, 111—113 (нем.)

Ставится задача найти последовательность натуральных чисел b таких, чтобы элементы треугольников со сторонами $b-1$, b, $b+1$ выражались рациональными числами. Исходя из того, что площадь треугольника

$$f = \frac{b}{2}\sqrt{3\left(\frac{b^2}{4} - 1\right)}$$

будет рациональна, если за b взять удвоенный числитель подходящей дроби m_{2n}/k_{2n} для $\sqrt{3}$ (в силу соотношения $(m_{2n})^2 - 1 = 3(k_{2n})^2$), автор, используя свойства этих подходящих дробей, получает для сторон треугольников, их площадей, радиусов вписанного круга и углов рекуррентные формулы.

Во второй части рассматриваются прямоугольные треугольники, приближающиеся к равнобедренным. При помощи подходящих дробей для $\sqrt{2}$ устанавли-

ваются для сторон a_n, b_n, c_n (c_n — гипотенуза) формулы:

$$a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1} \quad (a_0 = 0),$$
$$b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + 2c_{n-1} \quad (b_0 = 1),$$
$$c_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + 3c_{n-1} \quad (c_0 = 1),$$

дающие тройки чисел:
4, 3, 5; 20, 21, 29; 120, 119, 169; 696, 697, 985;....
При этом значения $\operatorname{tg}(\alpha_n/2)$ равняются подходящим дробям для $\sqrt{2-1}$.

В заключение приводятся рекуррентные формулы для сторон прямоугольных треугольников, удовлетворяющих соотношениям:

$$b_n = \frac{q}{2} a_n + 1 \qquad (1)$$

и

$$c_n = \frac{q}{2} a_n + 1. \qquad (2)$$

Острый угол α_n этих треугольников с возрастанием n стремится к $\operatorname{arc\,tg}\, 2/q$ в случае (1) и к $\arcsin 2/q$ в случае (2). *А. Г. Школьник*

2691. Криволинейные фигуры и фигуры, составленные из кривых и прямых. Тебо (Curvilinear and mixtilinear figures. Thebault Victor), Scripta math., 1953, 19, № 1, 69—77 (англ.)

Статья посвящена занимательной геометрии. В историческом введении дан обзор фигур, составленных из круговых дуг и изучавшихся еще в эпоху Архимеда. Рассматривается обобщение известной теоремы о гиппократовых луночках на случай произвольного треугольника. В заключение даны свойства двух фигур вращения: меридиан одной составлен из круговых дуг (купол), другой — из круговой дуги и двух прямых (кубарь, волчок). Автор отмечает, что некоторые свойства этих фигур были описаны им уже ранее (Amer. Math. Monthly, 1947, 54, 474—477) и некоторые формулы настоящей статьи согласуются с формулами, восходящими еще к теории описанных полигонов и полиэдров (Brassine E., J. math. pures et appl. (Liouville's J.), 1843, 8, 46—48). *С. Д. Россинский*

2692. Параллельное отражение света системой плоских зеркал. Келлер (Parallel reflection of light by plane mirrors. Keller Joseph B.), Quart. Appl. Math., 1953, 11, № 2, 216—219 (англ.)

Доказывается, что если каждый луч света, упавший на одну из граней трехгранного угла, образованного тремя плоскими зеркалами, после многократного отражения от граней угла уходит в направлении, противоположном направлению первоначального падения, то двугранные углы трехгранного угла равны $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, или $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/5$, или, наконец, $\pi/2$, $\pi/2$, π/n, где n — произвольное четное число. Обратно, эти условия являются также и достаточными для того, чтобы каждый луч света отражался в направлении, параллельном первоначальному (аналогично тому, как в плоскости луч света после ряда отражений от сторон плоского угла уходит в направлении, обратном направлению первоначального падения, в том и только в том случае, когда величина угла равна π/n, где n четно). Число отражений от граней трехгранного угла в этих трех случаях соответственно равно 9, 15 и $n+1$.

Этот результат обобщает результат Синга (Synge J. L., Quart. Appl. Math., 1946, 4, 166—176), ранее показавшего, что луч света после однократного отражения от граней трехгранного угла уходит в направлении, обратном первоначальному направлению, в том и только в том случае, если все грани угла взаимно перпендикулярны. В конце работы показывается, что никакой k-гранный угол с зеркальными гранями при $k > 3$ не может отражать каждый луч в направлении, обратном первоначальному направлению. *И. М. Яглом*

2693. Основная задача геометрии шасси. Определение и проверка оси, вокруг которой поворачивается шасси. Бялковский (The basic problem of undercarriage geometry. The definition and checking of the pivot axis about which the undercarriage rotates. Bialkowski L. S.), Aircraft Engng, 1953, 25, № 294, 236—238 (англ.)

Если плоскость симметрии колеса одна и та же как в положении, когда шасси опущены, так и в положении, когда шасси втянуты (или убраны), то втягивание шасси осуществляется одним вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости колеса.

Когда же плоскость симметрии колеса изменяется в этих положениях шасси, тогда задача относится к трехмерной геометрии и графически может быть решена методами начертательной геометрии. На плоскостях проекций с осью GL (основная линия) графически изображена геометрическая проекция шасси в опущенном положении $(KW) — (K'W')$ и в убранном положении $(kw) — (k'w')$, где точка W — центр колеса, K — точка на оси колеса, горизонтальная проекция (KW) параллельна GL, вертикальная проекция $(K'W')$ совпадает с GL; прямая $(kw) — (k'w')$ скрещивается с GL.

Искомая ось вращения шасси, вокруг которой надо повернуть шасси, чтобы из положения прямой $(KW) — (K'W')$ перейти в положение прямой $(kw) — (k'w')$, найдется как пересечение двух плоскостей, перпендикулярных к отрезкам $(Kk) — (K'k')$ и $(Ww) — (W'w')$ в их серединах. Каждая из этих двух плоскостей определяется двумя пересекающимися прямыми.

Плоскость, перпендикулярная к отрезку $(Ww) — (W'w')$, определяется фронталью (aa') и горизонталью (bb'); плоскость, перпендикулярная к отрезку $(Kk) — (K'k')$, определяется фронталью (ee') и горизонталью (ff'). Линия пересечения плоскостей $(aa') — (bb')$ и $(ee') — (ff')$ является осью вращения для данного шасси.

В статье (с семью фигурами) описываются три метода определения линии пересечения двух данных плоскостей и два способа проверки оси вращения. В первом методе при помощи следов плоскостей $(aa') — (bb')$ и $(ee') — (ff')$ находятся точки пересечения их горизонтальных следов — точка (HH') — и их вертикальных следов — точка (VV') — и находится ось вращения $(HV) — (H'V')$.

В остальных методах берут вспомогательные прямые или плоскости и ищут такие точки (PP') и (rr'), лежащие в плоскостях $(aa') — (bb')$, $(ee') — (ff')$, которые определяют ось вращения $(Pr) — (P'r')$.

Проверка оси вращения состоит в том, что от какой-либо проверочной точки оси, например (PP'), находят расстояния до любой точки, например (WW') и (ww'), шасси в опущенном и поднятом положениях и проверяют построением равенство отрезков $(PW) - (P'W')$ и $(Pw) - (P'w')$.

Можно проверить ось другим способом: если по данному опущенному положению шасси вращением последнего вокруг оси построить убранное положние шасси и затем сравнить с известным положением $(kw) - (k'w')$. *В. С. Люкшин*

2694 К. Аналитическая геометрия. Пиккерт (Analytische Geometrie. Pickert Günther (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Band 24, S. 10+398, 76 Abb., Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1953), Math. scand., 1953, **1**, № 1, 7 (библ.)

2695 К. Лекции по геометрии. I. Элементы аналитической геометрии. IV. Поверхности и пространственные кривые линии. Морин (Lezioni di geometria. Morin U. I. Elementi di geometria analitica, 2-a ed., pp. 192, 1200 L., IV. Superficie e curve sghembe, pp. 212, 1300 L., CEDAM, Padova, 1953), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 27/28, 27 (библ.)

2696 К. Наглядная геометрия. Блашке (Anschauliche Geometrie. Blaschke W. (Math. Einzelschr., Bd. 1), S. 61, Oldenbourg, München, 1953, 6 DM), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 27/28, 21 (библ.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2697. Инволюция. Невилл (Involution. Neville E. H.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 199—202 (англ.)

Популярная статья по теории инволюций в координатном изложении.

2698. Об одной конфигурации Гессе, связанной с конфигурацией Биджовского $(12_4, 16)$. Цахариас (Über eine mit der Bydžovskýschen Konfiguration $(12_4, 16_3)$ verbundene Hessesche Konfiguration. Zacharias Max), Math. Nachr., 1953, **10**, № 3—4, 187—196 (нем.)

За последнее десятилетие автор опубликовал ряд работ, касающихся построения и свойств конфигурации Гессе $(12_4, 16_3)$; под последней он подразумевает такую частную конфигурацию, двенадцать точек которой распадаются на три четверки так, что каждая прямая конфигурации содержит одну из точек каждой четверки. В работе 1949 г. автор дал такое построение конфигурации Гессе: пусть четыре прямых пучка с центром S содержат каждая еще по две точки; выбрасывая по очереди одну из прямых, каждый раз мы можем 6 оставшихся точек комбинировать в четыре пары перспективных относительно S треугольников; тогда 16 осей перспективы этих 16 пар треугольников и 12 точек пересечений соответствующих их сторон образуют конфигурацию Гессе $(12_4, 16_3)$ (назовем это предложение «построением М. З.»).

В статье 1952 г. автор указал, что в конфигурации Биджовского $(12_4, 16_3)$ восемь точек конфигурации (u_1, u_2, u_3, u_4) (w_1, w_2, w_3, w_4) перспективно расположены относительно каждой точки третьей четверки (v_1, v_2, v_3, v_4) и также относительно каждой из двух точек:

$$P = (u_1w_4,\ u_2w_3,\ u_3w_2,\ u_4w_1),$$
$$Q = (u_1w_3,\ u_2w_4,\ u_3w_1,\ u_4w_2).$$

В данной статье автор ставит и решает вопрос: не даст ли построение М. З. на основе одного из шести указанных перспективитетов в конфигурации Биджовского некоторую связанную с нею конфигурацию Гессе? Результат им получен такой: только перспективитет относительно точки Q дает полную конфигурацию Гессе, присоединенную к конфигурации Биджовского, остальные перспективитеты дают лишь вырождения конфигурации Гессе.

Автор пользуется элементарными синтетическими соображениями и местами координатным методом. Для найденной конфигурации автор показывает, что ее 12 точек на 6 сторонах каждого из полных четырехсторонников PQv_1v_2, $u_1u_2u_3u_4$ и $w_1w_2w_3w_4$ образуют сеть Чевы и гармонически сопряженную сеть Менелая, а ее 16 прямых для этих сетей являются соответствующими прямыми Менелая (согласно определениям, данным им в статье в Math. Nachr., 1949, **2**, 163—170). *С. С. Бюгенс*

2699. Структурные свойства, фигурные матрицы и разложения проективных конфигураций. Херман (Struktureigenschaften, Figurmatrizen und Zergliederungen projektiver Konfigurationen. Herrmann Horst), Math.-Phys. Semesterber., 1953, **3**, 90—115 (нем.)

Описываются различные методы составления и модификации конфигураций; например, обобщается прием, посредством которого полный четырехугольник и четырехсторонник дополняются до конфигурации Дезарга. При помощи устранения трех скрещивающихся прямых из полного шестивершинника в пятимерном пространстве получается конфигурация из 6 точек, 12 прямых, 8 плоскостей, 12 трехмерных плоскостей и 6 четырехмерных плоскостей, имеющая в качестве ее проекции октаэдр и в качестве сечения — куб.

Развивая результаты одной прежней работы (Arch. Math., 1950, 2, 207—215), автор показывает, каким образом бо́льшая часть классических конфигураций (например таких, которые образованы при помощи 27 прямых и 45 трижды касательных плоскостей поверхности третьего порядка) может быть получена посредством численного видоизменения «биномиальной» конфигурации $\binom{n}{k}^{(r)}$, которая есть r-мерное плоское сечение полного n-вершинника в $(k + r - 1)$-мерном проективном пространстве. *Кокстер (H. S. M. Coxeter)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 786.

2700 К. Проективная геометрия и проективные метрики. Буземан, Келли (Projective geometry and projective metrics. Busemann Herbert, Kelly Paul J., vol. III of Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs, pp. VIII + 332, ill., Academic Press Inc., New York, 1953, May, 6.00 doll.), Suppl. Gener. Catal., 1953, 17 (библ.)

2701 К. Начертательная геометрия. Занден (Darstellende Geometrie. Sanden Horst

von, 4 Aufl., S. 32, 113 Abb., Teubner, Leipzig, 1953, 4.20 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1953, № 37, 1598 (библ.)

2702 Д. **Одноплоскостной метод изображения.** Мамед-Заде К. Д. Автореф. дисс. канд. техн. н., Азербайджанский политехн. ин-т, Баку, 1953

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2703. **О теореме Бертини и Лагерра относительно рациональных пространственных кривых 4-го порядка.** Годо (Sur un théorème de Bertini et Laguerre concernant les quartiques gauches rationnelles. Godeaux L.), Mathesis, 1953, 62, 5—8 (франц.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 789.

2704. **Об обращении теоремы Рейсса.** Тейксидор (Über die Umkehrung des Theorems von Reiss. Teixidor J.), Arch. Math., 1953, 4, № 3, 225—229 (нем.)

Показывается, что если в окрестности точки $y=0$ даны n криволинейных элементов $x_i=x_i(y)$ $(i=1,\ldots,n)$, причем функции $x_i(y)$ $n+1$ раз дифференцируемы и на каждой прямой в некоторой окрестности оси x удовлетворяют условию Рейсса

$$\sum_{i=1}^{n} x_i''(y)=0$$

(т. е. ему удовлетворяют решения уравнений $x_i=x_i(\overline{y+h+mx_i})$), то данные криволинейные элементы представляют n ветвей алгебраической кривой порядка n (именно, симметрическая функция

$$s_j=\sum_{i=1}^{n}[x_i(y)]^j$$

при $j=1,\ldots,n$ будет полиномом j-й степени от y).

В. В. Морозов

2705. **О некоторых геометрических вопросах, возникающих в теории вполне гиперболических уравнений с частными производными.** Брусотти (Sopra alcune questioni di Geometria suggerite dalla teoria delle equazioni a derivate parziali totalmente iperboliche. Brusotti Luigi), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, сер. 5, **39**, № 4, 381—404 (итал.)

В вещественном проективном пространстве S_p рассматривается класс $\Omega(p, N)$ алгебраических гиперповерхностей порядка N, гомеоморфных n концентрическим гиперсферам при $N=2n$ и n концентрическим гиперсферам с внешней им всем гиперплоскостью при $N=2n+1$. Такая гиперповерхность состоит из $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ компонент Φ_i, которые можно выбрать так, что Φ_j лежит внутри Φ_{j+1}.

Устанавливаются некоторые их характеристики, а также характеристики их аналогов в аффинном пространстве. В частности, для того чтобы алгебраическая гиперповерхность порядка N в S_p принадлежала классу $\Omega(p, N)$, необходимо и достаточно существование такой точки O, чтобы любая прямая, проведенная через O, пересекала гиперповерхность в N различных точках. Допуская среди этих N точек существование совпадающих, автор приходит к обобщению $\Omega^*(p, N)$ класса $\Omega(p, N)$. Частным случаем поверхностей класса $\Omega(p, N)$ являются поверхности класса $\Omega_0(p, N)$, для которых все компоненты — овалоиды, т. е. пересекаются любой прямой не более чем в двух точках. В частности, Φ_1 всегда овалоид.

Указывается способ построения гиперповерхностей класса $\Omega(p, N)$ посредством метода малых вариаций. Особо рассматривается случай $p=2$. Для получения $\Omega(2, 2n)$ рассматривается кривая $F^*=0$ класса $\Omega^*(2, 2n)$, распадающаяся на n коник, и неприводимая кривая порядка $2n$ $G^*=0$, тогда при малых τ $F^*+\tau G^*=0$ есть кривая класса $\Omega(2, 2n)$. Большое количество чертежей иллюстрирует этот переход. В заключение показано, как из исследований автора вытекает известный факт: число точек перегиба у $\Omega(2, 2n)$ есть четное число φ, удовлетворяющее условию $0\leqslant\varphi\leqslant 4n(n-1)$, и для каждого такого φ можно построить $\Omega(2, 2n)$, имеющую ровно φ точек перегиба.

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

2706. **Параметрическое задание линии.** Лукарони (Curve sotto forma parametrica. Lucaroni Raffaele), Archimede, 1953, 5, № 1, 24—31 (итал.)

Рассматривается вопрос о параметрическом задании линии на проективной плоскости.

2707. **Простое кинематическое применение циклоиды.** Вайда (A simple kinematical application of the cycloid. Vajda S.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 206—208 (англ.)

Решается кинематическая задача: точка T движется по прямой, точка P — по окружности; определить радиус этой окружности так, чтобы точки встретились, если известны начальные положения точек, отношение их скоростей и касательная к окружности в начальном положении точки P.

Пусть Q — точка пересечения прямой TP с циклоидой, положение которой определяется начальными условиями задачи. Искомый радиус оказывается равным отношению TP/TQ.

Я. П. Бланк

2708. **Поверхности с заданным векторным дифференциальным инвариантом.** Лёбелль (Flächen mit vorgegebener vektorieller Differentialinvariante. Löbell Frank), S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1952, 99—101 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Если $x=x(u, v)$ — поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, то векторное выражение $x_u\times x_v$ является дифференциальным инвариантом веса один. Автор здесь рассматривает задачу определения всех поверхностей, для которых этот инвариант — заданная векторная функция от u и v. Указывается, что задача в некотором роде аналогична задаче определения всех поверхностей с заданной первой квадратичной формой, но в действительности отлична от нее. Действительно, так как инвариант определяет как кривизну K, так и сфе-

рическое изображение, то эта задача более тесно связана с задачей определения поверхностей, для которых заданы третья квадратичная форма и кривизна. *Джэксон* (*S. B. Jackson*)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 793.

2709. Связи между теориями конгруенций кривых и отображений на поверхности. Лёбелль (Zusammenhänge zwischen den Theorien der Kurvenkongruenzen und der Flächenabbildungen. Löbell Frank), S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1952, 47—50 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Рассмотрим конгруенцию ориентированных кривых в трехмерном евклидовом пространстве, и пусть e означает поле единичных касательных векторов.

Пусть поверхность x отображена на единичную сферу при условии, что каждой точке x соответствует та точка единичной сферы, которая определяется вектором поля e для точки x.

В статье интерпретируются основные величины отображаемой поверхности (например, Löbell F., S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1947, 15—23) в терминах основных величин конгруенции (Löbell F., Math. Z., 1952, 56, 208—218).

Джэксон (*S. B. Jackson*)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 793.

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

2710. О связи между строением n — 1-мерной поверхности и ее главными кривизнами. Костюченко А. Г., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 5 (57), 161—164

В n-мерном пространстве рассматривается дважды непрерывно дифференцируемая гиперповерхность Γ, все точки которой обыкновенные.

1. Устанавливается строение поверхности Γ, у которой одна из главных кривизн λ постоянна на всей поверхности и имеет кратность p. Если $\lambda \neq 0$, то поверхность Γ есть огибающая семейства сфер постоянного радиуса, центры которых расположены на $n-p-1$-мерной поверхности; если $\lambda = 0$, то поверхность Γ является огибающей $n-p-1$-параметрического семейства плоскостей.

2. Не существует поверхностей Γ, у которых две главные кривизны λ_1 и λ_2 постоянны на всей поверхности, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

3. Рассматривается поверхность Γ, у которой одна из главных кривизн имеет кратность $p > 1$ на всей поверхности, но не предполагается постоянной. Каждая точка такой поверхности принадлежит некоторой p-мерной сфере, целиком входящей в состав поверхности Γ. *В. Т. Базылев*

2711. О группах голономии римановых многообразий. Берже (Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. Berger Marcel), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 8, 472—473 (франц.)

Рассматривается сокращенная однородная группа голономии (преобразования касательного пространства, отвечающие переносу векторов вдоль замкнутых путей, гомотопных тождественному) риманова многообразия класса C^3, не являющегося симметрическим. Предполагается, что эта группа неприводима и второго класса по Картану (является линейным представлением кронекеровского произведения нескольких простых групп вращений). Показывается (рассмотрением тензора кривизны), что тогда она простая или является произведением простой группы на окружность (simple par T^1). *И. З. Розенкноп*

2712. Методы представления физических величин и соотношений в математической физике. Геометрический метод в математической физике. Теодореску (Metode de reprezentare a mărimilor şi relaţilor fizice in fizica matematică. Teodorescu N.), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 8, 337—348 (рум.)

Популярный обзор принятых в геометрии методов представления величин.

2713. Основы общей теории относительности. Крбек (Anfangsgründe der allgemeinen Relativitätstheorie. Krbek F. von), Wissensch. Z. Univ. Greifswald. Math. Nat. Reihe, 1953, 2, 23—36 (нем.)

Популярная статья.

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 806.

2714. Об изложении основ специальной теории относительности. Терлецкий Я. П., Вопр. философии, 1953, № 4, 207—212

Подвергается критике мнение Эйнштейна и его последователей о том, что уравнения Лоренца вошли в физику не как соотношения, отражающие объективно реальные свойства пространства и времени, проявляющиеся при движениях с большими скоростями, а как результат уточнения определения операций измерения одновременности разобщенных событий, промежутка времени и длины вследствие учета конечной скорости распространения сигналов.

Приводится (как один из возможных) вывод преобразований Лоренца из допущения зависимости инертной массы тела от скорости и неизменности формы законов механики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Кроме того, предполагаются изотропность и однородность пространства и времени.

Автор приходит к выводу, что нет никаких оснований считать, что в основе специальной теории относительности лежит положение о невозможности сигнализации с бесконечно большой скоростью и эйнштейновское определение одновременности разобщенных событий посредством световых сигналов. Объективное содержание специальной теории относительности не зависит от таких субъективных моментов как наличие или отсутствие световых сигналов в распоряжении наблюдателя. *М. М. Карпов*

2715 К. Введение в теорию тензоров, спиноров и релятивистских волновых уравнений. (Теория релятивности.) Ч. 1. Математические основы и физические принципы. Корсон (Introduction to tensors, spinors and relativistic wave-equations (Relation theory). 1 part: Mathematical foundation and physical principles. Corson E. M., pp. 235, Blackie and Son, Ltd., London and Glasgow, 55 s.), Advancement Sci., 1953, 10, № 38, 8 (библ.)

2716 К. Тензорное исчисление. Спейн (Tensor calculus. Spain Barry, University

Mathematical Text Series, pp. 121, Interscience publishers, Inc., New York, 1953, 1.55 doll.), New Interscience titles, 1953, 14 (библ.)

2717 Д. Асимптотические преобразования p-ортогонально-сопряженных систем в n-мерном пространстве. Григорьев И. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Н.-и. ин-т мат. и механики МГУ, М., 1953

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА. КЕЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

2718. Об асимптотических параметризациях. Хартман, Винтнер (On asymptotic parametrizations. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, 75, № 3, 488—496 (англ.)

Асимптотической называется такая параметризация поверхности отрицательной кривизны, при которой координатные линии совпадают с асимптотическими линиями поверхности. В предыдущей работе (РЖМат, 1953, 886) авторы доказали, что если поверхность S допускает асимптотическую C^n-параметризацию (где $n \geqslant 2$), то она допускает также необязательно асимптотическую C^{n+1}-параметризацию.

В настоящей работе рассматривается вопрос о наивысшем возможном классе асимптотической параметризации поверхности отрицательной кривизны, допускающей произвольную параметризацию известного класса. Показано, что если поверхность отрицательной кривизны допускает C^m-параметризацию (где $m \geqslant 3$), то она допускает также асимптотическую C^{m-2}-параметризацию. Этот результат может быть усилен, если известно, что кривизна поверхности, отнесенной к параметризации класса C^m, есть функция класса C^{m-1}; тогда можно утверждать, что поверхность допускает асимптотическую параметризацию класса C^{m-1} (а не C^{m-2}), если только $m \geqslant 2$. Предположение, что кривизна K есть функция класса C^{m-1} (а не класса C^{m-2}, как это следует из формул для K), существенно: если поверхность допускает C^m-параметризацию и асимптотическую C^{m-2}-параметризацию, то отсюда еще не следует, что она допускает асимптотическую C^{m-1}-параметризацию (доказательство проведено в предположении $m = 2$). *И. М. Яглом*

2719. Линейные аддитивные функционалы и равносоставленность многогранников. Хадвигер (Lineare additive Polyederfunktionale und Zerlegungsgleichheit. Hadwiger H.), Math. Z., 1953, 58, № 1, 4—14 (нем.)

Пусть G — некоторая группа движений k-мерного евклидова пространства R, заключающая в себе группу всех параллельных переносов (например, полная группа движений). Функционал $\varphi(A)$ многогранника A пространства R называется G-инвариантным, если для двух многогранников A и B, получающихся один из другого преобразованием группы G, $\varphi(A) = \varphi(B)$; он называется аддитивным, если $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, где сумма $A + B$ означает многогранник, составленный из многогранников A и B в смысле элементарной геометрии; он называется линейным, если $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$, где λ — произвольное положительное число, λA — многогранник, гомотетичный многограннику A с коэффициентом подобия λ. Два многогранника A и B называются G-равносоставленными, если $A = \sum_1^n A_\nu$, $B = \sum_1^n B_\nu$, а каждый многогранник B_ν получается из соответствующего многогранника A_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) преобразованием группы G. Многогранник, который разложим в сумму конечного числа k-мерных параллелотопов, называется цилиндрическим многогранником. Два многогранника называются G равносоставленными по модулю Z, если существуют два таких цилиндрических многогранника U и V, что многогранники $A + U$ и $B + V$ G-равносоставлены; это отношение между многогранниками удовлетворяет условиям симметрии, рефлексивности и транзитивности.

В работе доказывается существование G-инвариантных линейных аддитивных функционалов многогранников; здесь используется известная конструкция, при помощи которой доказывается существование разрывных решений функционального уравнения $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (см. Hamel G., Math. Ann., 1905, 60, 459—462).

Далее показывается, что каждый такой функционал обязательно обращается в нуль на множестве всех цилиндрических многогранников. Основная теорема работы гласит: необходимым и достаточным условием G-равносоставленности по модулю Z двух многогранников A и B является совпадение для этих многогранников значений всех G-инвариантных линейных аддитивных функционалов; этим самым вопрос о G-равносоставленности по модулю Z сводится к проблеме перечисления всех G-инвариантных линейных аддитивных функционалов многогранников. Для случая, когда G есть группа T параллельных переносов, последнюю проблему удается решить, сведя задачу перечисления T-инвариантных линейных аддитивных функционалов многогранников в k-мерном пространстве к задаче нахождения всех таких функционалов в $(k-1)$-мерном пространстве; так как при $k = 1$ все такие функционалы $\varphi(A)$ очевидным образом пропорциональны длине отрезка A, тем самым дается полное перечисление всех возможных функционалов в k-мерном пространстве при любом k. Задача перечисления всех G-инвариантных линейных аддитивных функционалов при помощи неймановского интегрирования по группе (Neuman J., Trans. Amer. Math. Soc., 1934, 36, 445—492) сводится к перечислению всех T-инвариантных функционалов; впрочем это сведение является эффективным лишь в случае, когда подгруппа вращений G (подгруппа преобразований, оставляющих на месте начало координат) является конечной группой.

В качестве приложения построенной общей теории автор доказывает следующую теорему: если многогранник A' получается из многогранника A k-мерного евклидова пространства симметрией относительно точки, то для каждого T-инвариантного линейного аддитивного функционала многогранников $\psi(A)$ имеет место соотношение: $\psi(A') = (-1)^{k-1}\psi(A)$. Отсюда следует, что в пространствах четного числа измерений всякий многогранник G-равносоставлен с некоторым цилиндрическим

многогранником, где $\hat{G}$ — группа, порождаемая параллельными переносами и симметрией относительно начала координат (обобщение теоремы Ф. Бояи о равносоставленности равновеликих многоугольников плоскости). В пространствах нечетного числа измерений всякий многогранник A T-равносоставлен по модулю Z с симметричным ему относительно точки многогранником $\hat{A}$.

И. М. Яглом

2720. О покрывающих решетках. Бамбах (On lattice coverings. Bambah R. P.), Arch. Math., 1953, **19**, № 3, 447—459 (англ.)

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, в котором фиксирована точка O. Точки R^n отождествляются с их радиусами-векторами из точки O. Пусть $K \subset R^n$ и Λ — параллелепипедальная точечная решетка в R^n, содержащая O, и пусть $d(\Lambda)$ — объем основного параллелепипеда решетки. Говорят, что Λ — покрывающая решетка для K, если

$$K + \Lambda = \{k + l\}_{\substack{k \in K \\ l \in \Lambda}} = R^n.$$

Верхняя грань $d(\Lambda)$ для всех покрывающих решеток Λ для K обозначается $c(K)$. Автор доказывает, что если K замкнуто, ограничено и содержит O в качестве внутренней точки, то существует такая покрывающая решетка Λ для K, что $d(\Lambda) = c(K)$. Если K — замкнутое ограниченное множество и Λ — покрывающая решетка для K такая, что $d(\Lambda) = c(K)$, то на границе K существует n линейно независимых точек, которые покрыты просто, т. е. не содержатся во внутренности ни одного из множеств вида $K + l$, где $l \in \Lambda$.

Доказывается еще несколько теорем подобного типа, упомянем из них следующую:

Пусть K и K' — звездные тела, определенные неравенствами:

$$K: \{g(x_1, \ldots, x_r)\}^{r/n} \cdot \{h(x_{r+1}, \ldots, x_n)\}^{(n-r)/n} \leqslant 1,$$

$$K': \{g(x_1, \ldots, x_r)\}^{r/n} \cdot \{e(x_1, \ldots, x_r) + h(x_{r+1}, \ldots, x_n)\}^{(n-r)/n} \leqslant 1.$$

Тогда $c(K) = c(K')$. (Здесь g, e, h — функции расстояний для звездных тел в пространствах R^r, R^r, R^{n-r} соответственно; $1 \leqslant r \leqslant n-1$.)

В. А. Ефремович, А. С. Шварц

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

2721. Объем многогранника, вписанного в шар. Роджерс (The volume of a polyhedron inscribed in a sphere. Rogers C. A.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 4, № 112, 410—416 (англ.)

Пусть Q^n — n-мерный шар единичного радиуса с центром в начале координат, а μ — n-мерная мера Лебега; пусть $\Pi \subset Q^n$ является выпуклым многогранником с N гранями. Тогда

$$\frac{\mu(Q^n)}{\mu(\Pi)} \geqslant \int_0^1 \frac{dt}{[1 - \bar{C}^\delta (1 - t^\delta)]^{n/2}},$$

где

$$\delta = \frac{2}{n-2}, \qquad \bar{C} = \frac{n\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)\mu(\Pi)}{N\pi^{(n-1)/2}}.$$

Это является обобщением соответствующего результата Бамбаха и Давенпорта (Bambah R. P., Davenport H., J. London Math. Soc., 1952, **27**, 224—229). В случае, когда $n \to \infty$ и $N \to \infty$, причем так, что существует $\lim N^{1/n} = \lambda$, имеет место неравенство $\overline{\lim}\, \mu(\Pi) / \mu(Q^n) \leqslant 1 - \lambda^{-2}$.

Л. Д. Кудрявцев

2722. Об изопериметрическом неравенстве для k-мерного выпуклого полиэдра. Хадвигер (Zur isoperimetrischen Ungleichung für k-dimensionale konvexe Polyeder. Hadwiger H.), Nagoya Math. J., 1953, **5**, 39—44 (нем.)

Пусть V — объем и F — площадь поверхности k-мерного выпуклого полиэдра, ограниченного n клетками. Рассмотрим n конусов вращения, сферические основания которых имеют в совокупности площадь, равную F, а сумма телесных углов при вершинах равна площади поверхности k-мерной единичной сферы. Доказывается, что полный объем этих конусов $\geqslant V$ и равенство достигается только для двумерного правильного полигона. Это включает в себя усиление классического изопериметрического неравенства. Доказательство основывается на идеях Голдберга (Goldberg, Tohoku Math. J., 1935, **40**, 226—236), доказавшего предыдущую теорему для $k = 3$

Tom (L. Fejes Tóth)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 7, 674.

2723. Выпуклые пространства. Неф (Konvexe Räume. Nef Walter), Arch. Math., 1953, **4**, № 3, 216—221 (нем.)

Эта заметка примыкает к работе Кнезера (Kneser H., Arch. Math., 1952, **3**, 198), где аксиоматизируется понятие выпуклой части линейного пространства. Автор определяет понятие базиса выпуклого пространства и доказывает его существование для всякого выпуклого пространства. Затем доказывается теорема о разложении точки по данному базису и о единственности такого разложения. На этой основе дается новое доказательство теоремы Кнезера о включении выпуклого пространства в линейное. Наконец, дается применение к теории равносоставленных многогранников. *В. А. Ефремович*

См. также: 2470, 2473—2475, 2477, 2480, 2484 К, 2485 К, 2545, 2733

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

2724. Об устойчивости разностных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Митчелл, Крагс (Stability of difference relations in the solution of ordinary differential equations. Mitchell A. R., Craggs J. W.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 42, 127—129 (англ.)

Известный результат (Шура-Бура М. Р., Прикл. математика и механика, 1952, **16**, № 5, 375; Rutishauser H., Z. angew. Math. und Phys., 1952, **3**, 65—74), относящийся к вопросу об условиях устойчивости разностных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, применяется к некоторым конкретным формулам (Адамса, Мультона) для уравнения $y' = -y$. Оба метода неустойчивы, начиная с некоторого шага h. Для метода Адамса дается оценка для максимальной величины шага, при которой еще сохраняется устойчивость.

М. Л. Бродский

2725. О численном интегрировании дифференциальных уравнений гиперболического типа. Дюнген ван ден (Sur l'intégration numérique des équations différentielles hyperboliques linéaires. Dungen van den Frans H.), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 1, 36—43 (франц.)

Напоминается, что ранее построенные автором приближенные формулы (Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1952, сер. 5, **38**, 39—49, 669—684) дают в пределе точное решение задачи Коши для общего волнового уравнения в n-мерном пространстве. Описывается в общих чертах новый метод решения волнового уравнения, основанный на определении интегральной варианты (C. r. Acad. sci., 1952, **235**, № 10, 532—533; № 19, 1106—1107). Приводятся лишь формальные результаты. Вопрос аппроксимации варианты не затронут.

Примечание референта. Утверждение автора о сходимости ранее полученных им формул не является точным. В этом можно убедиться на простейшем случае одномерного волнового уравнения

$$u''_{tt}(t, x) = c^2 u''_{xx}(t, x)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = f(x) \text{ и } u'_t(0, x) = g(x).$$

В самом деле, формулы автора выведены для отыскания значений $u\left(\nu\frac{h}{c}, 0\right)$ $(\nu = 1, 2, 3)$. Они содержат явным образом суммы некоторого числа значений $f(x)$ и $g(x)$ в точках прямой $t = 0$, отстоящих друг от друга на h. Из них суммы со значениями $g(x)$ совпадают соответственно с котесовскими суммами (известными из теории квадратурных формул) с тремя, пятью и семью членами. Принимается без доказательства, что такое совпадение имеет место для любого $\nu = c\frac{T}{h}$, где T — некоторое фиксированное значение t. Но при $h \to 0$ соответствующая котесовская формула может расходиться (Стеклов В. А., Изв. АН СССР, № 3, 1916, 169—186; Кузьмин Р. О., Изв. Ленингр. политехн. ин-та, 1931, **33**, 5—14), и формулы автора могут не стремиться к точному решению при $\nu \to \infty$. Когда же h стремится к нулю при фиксированном ν, они дают в пределе тривиальное равенство $u(0, 0) = f(0)$.

Ш. Е. Микеладзе

2726. Численное решение уравнения распространения тепла. Миньо (Sur les solutions numériques du problème de la chaleur. Mignot Noël), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 18, 1735—1737 (франц.)

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) - B(x)u(x,t) = C(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$
$$(a \leqslant x \leqslant b;\quad t \geqslant 0;\quad K > 0;\quad C > 0;\quad B \geqslant 0)$$

с краевыми условиями

$$u(a,t) - h\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0,$$
$$u(b,t) + H\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=b} = 0 \quad (h \geqslant 0,\ H \geqslant 0) \quad (2)$$

либо

$$u(a,t) = u(b,t);\quad K(a)\frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = K(b)\frac{\partial u(b,t)}{\partial x} \quad (3)$$

заменяется в точке $(j\Delta x, (k+\alpha)\Delta t)$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ разностным уравнением [сетка Коллатца (Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 200) с шагами Δx и Δt], которое решается разделением переменных $(u(j\Delta x, k\Delta t) = f(j\Delta x)\psi(k\Delta t))$. Для f получается уравнение

$$L_j(f) \equiv \frac{K((j-1)\Delta x) + K(j\Delta x)}{2} f((j-1)\Delta x) -$$
$$- \frac{K((j-1)\Delta x) + 2K(j\Delta x) + K((j+1)\Delta x)}{2} f(j\Delta x) +$$
$$+ \frac{K(j\Delta x) + K((j+1)\Delta x)}{2} f((j+1)\Delta x) -$$
$$- \Delta x^2 B(j\Delta x) f(j\Delta x) = -\lambda C(j\Delta x) f(j\Delta x)\Delta x^2$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} f(0)[(1-l)\Delta x + h] + f(\Delta x)(l\Delta x - h) = 0, \\ f((N-1)\Delta x)[(1-l')\Delta x - H] + f(N\Delta x)[l'\Delta x + H] = 0, \end{aligned}\right\} (2')$$

либо

$$\left.\begin{aligned} [K(0) + l(K(\Delta x) - K(0))][f(\Delta x) - f(0)] = \\ = [K((n-1)\Delta x) + l'(K(n\Delta x) + \\ + K((n-1)\Delta x))][f(n\Delta x) - f((n-1)\Delta x), \\ f(0) + l(f(\Delta x) - f(0)) = f((n-1)\Delta x) + \\ + l'(f(n\Delta x) - f((n-1)\Delta x)), \end{aligned}\right\} (3')$$

где $a = l\Delta x$; $0 \leqslant l < 1$; $b = (N-1) + l'\Delta x$; $0 < l' \leqslant 1$. При этом дается оценка погрешности на линиях (2'), (3'). Называя задачу «самосопряженной», если

$$\sum_{j=1}^{N-1} [f(j\Delta x) L_j(g) - g(j\Delta x) L_j(f)] = 0 \quad (4)$$

(при этом собственные числа λ действительны), и «определенной», если

$$\sum_{j=1}^{N-1} f(j\Delta x) L_j(f) < 0, \quad (5)$$

автор показывает, что (4) и (5) выполнены всегда при (2'), а при (3') для этого достаточно

$$l = l' = {}^1/_2 \text{ или } K = \text{const}. \quad (6)$$

Если, кроме (4), (5), выполнено условие

$$[K(0) + K(\Delta x)] f(\Delta x)[f(0) + f(\Delta x)] +$$
$$+ [K(n\Delta x) + K((n-1)\Delta x)] f((n-1)\Delta x) \times \quad (7)$$
$$\times [f(n\Delta x) + f((n-1)\Delta x)] \geqslant 0,$$

(для чего при (2′) достаточно $\Delta x\,(^1/_2 - l) + h > 0$ и $(l' - {}^1/_2)\,\Delta x + H > 0$, а при (3′) достаточно (6)), то для собственных чисел λ справедливо неравенство

$$0 < \lambda \Delta x^2 < \{4K(j\Delta x) + B(j\Delta x)\,\Delta x^2\} / C(j\Delta x).$$

Л. И. Камынин

2727. Приближенные методы математики. Херцбергер (Approximate methods in mathematics. Herzberger M.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 8, 853—860 (англ.)

Статья посвящена одному частному вопросу теории приближенных методов. Пусть функция $f(x)$ исследуется при малых x и для ее приближенного представления мы ограничиваемся степенями x не выше чем n, считая, что более высокими степенями x можно пренебречь:

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n. \qquad (1)$$

При установлении правил действий с приближенными представлениями (1) необходимо предусмотреть, что степени x, большие n, должны всюду отбрасываться. Например, если ограничиться малыми величинами до третьего порядка, нужно пользоваться следующей таблицей умножения:

	1	x	x^2	x^3
1	1	x	x^2	x^3
x	x	x^2	x^3	0
x^2	x^2	x^3	0	0
x^3	x^3	0	0	0

(2)

Матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix} \qquad (3)$$

будут давать регулярное представление функций $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ в том смысле, что если $f(x)$ и $g(x)$ есть функции такого вида и $h(x)$ есть их произведение (сумма), то матрица (3) для h будет произведением (суммой) матриц (3) для f и g. Такие же матричные представления приведены для полиномов двух и трех независимых переменных.

В статье не указано, в каких случаях может быть получена польза в вычислениях при переходе от полиномов к представляющим их матрицам. Даны два примера приложений к приближенному решению уравнений в частных производных. Вычисления в них ничем не отличаются от обычных вычислений при решении уравнений при помощи отрезков степенных рядов. *В. И. Крылов*

2728. Применение краковского метода к расчетам составов шихт для стекловарения. Яблковский, Хабовский (Krakowianowe obliczanie zestawów szklarskich. Jabłkowski J., Chabowski L.), Szkło i ceramika, 1953, **4**, № 4, 114—117 (польск.)

Для расчета составов шихт приходится решать системы линейных уравнений. Предлагаемый автором метод их решения по существу совпадает с компактной схемой решения методом исключения, отличаясь от нее дополнительной записью некоторых промежуточных результатов. В статье применяется непривычный способ умножения матриц: столбец на столбец («краковский» метод); с обычным способом умножения он связан формулой $A \circ B = B'A$.

В. М. Курочкин

2729. Алгебраическое решение проблемы анаморфозы функций в инвариантной форме. Вильнер И. А., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 1, 5—8

Автор формулирует проблему анаморфозы функции $F(z_1, z_2, z_3)$ как задачу отыскания по данной функции F трех векторов $\underset{i}{a}$ из уравнения

$$F = \left(\underset{1}{a}\,\underset{2}{a}\,\underset{3}{a}\right), \qquad (1)$$

где каждый из векторов $\underset{i}{a}$ зависит лишь от переменной z_i.

Рассматривается решение уравнения (1) в том предположении, что вектор $\underset{3}{a}$ зависит только от переменной z_3, а каждый из векторов $\underset{1}{a}$, $\underset{2}{a}$ есть функция пары переменных z_1 и z_2 (по терминологии автора — задача (S)).

Показывается, что для разрешимости задачи (S) достаточно, чтобы при каких-либо фиксированных z_i^k $(i, k = 1, 2, 3)$, для которых $A_{11}^{z_3} \neq 0$, выполнялись условия

$$A^{z_3} = 0, \qquad (4)$$

$$\underset{1}{A}^{z_3} = 0, \quad \underset{2}{A}^{z_3} = 0. \qquad (5)$$

Если задача (S) разрешима, то условия (4) и (5) выполняются при любых z_i^k, для которых $A_{11}^{z_3} \neq 0$.

Здесь

$$A^{z_3} = |a_{ij}|, \quad a_{ij} = F_{z_3^j z_1^{i-1} z_2^{i-1}} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

$$\underset{k}{A}^{z_3} = |a_{ij}|, \quad a_{ij} = F_{z_3^j z_k^{i-1}} \quad (k = 1, 2;\ i, j = 1, 2, 3),$$

причем символическая операция («дифференцирование») $F_{z_i^k}$ означает замену в выражении F переменной z_i некоторой переменной z_i^k; $A_{11}^{z_3}$ — минор определителя A^{z_3}.

Указанные условия (5) являются обобщениями на более широкий класс функций тех условий, которые были даны Келлогом (Kellog O. D., Z. Math. und Phys., 1914, 63) при решении задачи анаморфозы аналитического уравнения $F(z_1, z_2, z_3) = 0$.

Указывается способ отыскания через миноры определителей (4), (5) таких векторов $\underset{i}{\alpha}$, что уравнение $\left(\underset{1}{\alpha}\,\underset{2}{\alpha}\,\underset{3}{\alpha}\right) = 0$ будет равносильно уравнению $F = 0$; смысл выражения «равносильно» в работе не уточнен. Способ отыскания векторов $\underset{i}{a}$ ($\underset{i}{a}$ не $\underset{i}{\alpha}$), решающих задачу (S), а также векторов $\underset{i}{a}$ в проблеме анаморфозы функции автором не указан.

Даны соответствующие обобщения на случай функции $N > 3$ переменных.

Алгебраический метод, примененный автором, дает возможность не налагать особых теоретико-функциональных требований на рассматриваемую функцию, как это имеет место также и в работах Дюпорка (Dupuy de Lorq E., C. r. Acad. sci., 1898, 127, 265—268) и П. В. Николаева (Докл. АН СССР, 1949, 67, № 3, 421—423). Векторные формулировки позволяют вести изложение в более компактной форме, чем обычно.

Приведена теорема о принципе инвариантности формы указанных решений, заключающемся в том, что эти решения сохраняют силу, если под символическими производными или дифференциалами (введенными автором) понимать обычные, и обратно. Все утверждения приведены без доказательств.

П. В. Николаев

2730. Треугольная логарифмическая сетка для вычисления толщины покрытия. Керри (Triangular logarithmic net for the calculation of plating thicknesses. Curry D. R.), Metal Finishing, 1953, **51**, № 4, 79—81 (англ.)

Толщина d защитного покрытия определяется по формуле $d = p/p_0 q$, где p — разность веса изделия до и после покрытия, p_0 — удельный вес материала, q — площадь покрытия. Описана номограмма, дающая d в тысячных долях дюйма по данным значениям p в миллиграммах и q в кв. дюймах для всех обычно используемых для покрытия металлов, так что знания удельного веса не требуется.

Номограмма состоит из квадратной полулогарифмической сетки со стороной 15 дюймов и соединенного с ней равностороннего треугольника высотой 15 дюймов, содержащего двойную логарифмическую сетку из прямых, параллельных двум сторонам треугольника. Внутри квадрата проведены параллельно его диагонали прямые, соответствующие разным металлам. Вес p берется по стороне квадрата, содержащей логарифмическую шкалу с метками от 1 до 1000, площадь q — на одной стороне треугольника (логарифмическая шкала с метками от 0,1 до 100), толщина d отсчитывается по другой его стороне (такая же логарифмическая шкала). Номограмма дает результаты с двумя значащими цифрами, что достаточно для практических целей.

В. М. Брадис

2731. Номограмма для определения объема древесины. Люнцман (Nomogramm zur Bestimmung der Holzmasse. Lünzmann K.), Z. Weltforstwirtsch., 1953, **16**, № 2, Beilage (нем.)

Приводится составная сетчатая номограмма для определения объема древесины, построенная для формулы

$$V = \frac{2500 \cdot \pi d^2 h f}{e^2},$$

где h — средняя высота дерева, d — диаметр на высоте груди, e—среднее расстояние между деревьями, f — число из приложенной таблицы.

Г. С. Хованский

2732. Некоторые простые номограммы для применения сопротивлений с отрицательным температурным коэффициентом. Сюше (Quelques abaques simples pour l'utilisation des thermistances. Suchet J.), Mesures et contrôle industr., 1953, **18**, № 195, 445—449 (франц.)

Подробно излагается методика построения сетчатых номограмм (абаков Декарта) для формул, наиболее употребительных при применениях сопротивлений с отрицательным температурным коэффициентом. Многочисленные примеры таких применений приведены в двух предыдущих статьях автора (Nguyen Thein-Chi, Suchet J., Mesures et contrôle industr., 1952, sept.—oct.; Suchet J., Mesures et contrôle industr., 1953, avr.). *Г. Е. Джемс-Леви*

2733. Номограмма для определения температуры обмотки по сопротивлениям. Отто (Nomogramm zur Ermittlung der Wicklungstemperatur aus Widerstandsmeßwerten. Otto A.), Dtsch. Elektrotechnik, 1953, **7**, № 3, 119—121 (нем.)

Приводится транспарантная номограмма, построенная для формулы

$$\frac{R_w}{R_k} = \frac{235 + t_w}{235 + t_{R_k}},$$

где R_w — сопротивление обмотки в нагретом состоянии, R_k — сопротивление обмотки в холодном состоянии, t_{R_k} — температура при измерении сопротивления обмотки в холодном состоянии, t_w — температура нагретой обмотки.

Номограмма построена по принципу подобных треугольников. Переменные R_w и R_k представлены равномерными шкалами на линейке-транспаранте, переменные t_w и t_{R_k} — семействами параллельных прямых на основной плоскости. *Г. С. Хованский*

2734. К определению наиболее экономичной толщины теплоизоляционных труб. Бём (Zur Bestimmung der wirtschaftlichsten Dicke von Rohrabdämmungen. Boehm J.), Energie (München), 1953, **5**, № 5, 138—141 (англ.)

Статья является переработанным переводом работы Бёма «La détermination de l'épaisseur la plus économique d'un calorifuge» (Schweiz. Bl. für Heizung und Lüftung, 1951, **78**, 100—104; 1952, **79**, 55). Разработана номограмма для определения экономичной толщины теплоизоляционных труб. Номограмма построена для формулы

$$(2x + 1)[\ln(2x + 1)]^2 [A(4x + 1) + 1] = 2B$$

и состоит из параллельных шкал x и B и криволинейной шкалы для A. Величины x, A и B следующим образом зависят от исходных величин:

$$x = e_0 / d_i,\ A = 50\, d_i P' / P_0,\ B = \frac{\lambda \Theta Z C}{10^4 d_i p P_0},$$

где e_0 — экономичная толщина теплоизоляционного слоя; d_i — внутренний диаметр теплоизоляционного слоя; λ — коэффициент теплопроводности изолятора; Θ — падение температуры при переходе через слой; Z — число эксплуатационных часов в году; C — стоимость 10^6 *ккал*; $\left.\begin{matrix} p \\ P_0 \\ P' \end{matrix}\right\}$ — некоторые экономические характеристики. *Г. С. Хованский*

2735. Номограмма к изготовлению раствора сульфата аммония определенной концентрации. Бреннер-Хольцах, Штеэлин (Nomogramm zur Herstellung von Ammoniumsulfatlösungen von bestimmtem Sättigungsgrad.

Brenner-Holzach Olga, Staehelin M.), Helv. physiol. et pharmacol. acta, 1953, **11**, № 2, 212—215 (нем.)

Приводятся две номограммы из выравненных точек с тремя прямолинейными шкалами, из которых две параллельны. Номограммы позволяют определить количество соли, которое следует добавить в раствор начальной концентрации, чтобы получить раствор заданной концентрации. Одна из номограмм построена для 0°, другая — для 20°.

Номограммы построены по формуле

$$M = \frac{V_1 C_g (s_2 d_1 - s_1 d_2)}{d_2 - C_g s_2},$$

где V_1 — начальный объем раствора (в *л*), C_g — количество соли в насыщенном растворе (в *г*), s_1, s_2 — начальная и конечная степени насыщения (под степенью насыщения раствора понимается отношение количества соли в растворе к количеству соли в насыщенном растворе такого же объема), d_1, d_2 — начальная и конечная плотности раствора.

Г. С. Хованский

2736. Прямой номографический метод для решения уравнений момента устойчивого равновесия. Рилли (A direct nomographic method for solving flash equilibrium equations. Reilly P.M.), Petrol. Refiner, 1953, **32**, № 3, 119—122 (англ.)

Приводятся номограммы для решения нескольких уравнений:

$$v_r = \frac{z_r}{K_r + 1}; \quad w_r = \frac{z_r}{(K_r + 1)^2} \text{ и др.},$$

вывод которых изложен в предыдущей работе автора (Petrol. Refiner, 1951, **30**, № 7, 132).

Г. Е. Джемс-Леви

2737 К. Курс прикладной математики повышенного типа. Лам (Advanced level applied mathematics. Lambe C. G., pp. XIII+419, English Universities Press, Ltd., London, 1953, 25 s.), Chemistry and Industry, 1953, № 39, 1014 (библ.)

2738 К. Прикладной анализ. Ч. 2. Кунцманн (Analyse appliquée, 2 partie. Kuntzmann J., pp. 373, 77 fig., 15 réf. bibl., Centre de Documentation Universitaire, Paris, 1953, 1300 fr.), Ann. télécommun., 1953, **8**, № 8—9, A581 (библ.)

2739 РЖФ. Вычислительные методы в квантовой механике. Ч. I. Флюгге, Маршалл (Rechenmethoden der Quantenmechanik. Part I. Flügge S., Marshall H., 2-nd ed., pp. VIII+272, Springer-Verlag, Berlin, 1952, 29.80 doll.) [**Рецензия: Блэкман** (Blackman M.), Proc. Phys. Soc., 1953, **A66**, № 7, 669 (англ.)]

2740 РЖФ. Вычислительные методы в технике. Сальвадори, Барон (Numerical methods in engineering. Salvadori Mario G., Baron Melvin L., pp. 258, Prentice-Hall, Inc., New York, 1952, 6.65 doll.) [**Рецензия: Хиггинс** (Higgins Thomas J.), Electronics, 1953, **26**, № 5, 397—399 (англ.)]

ТАБЛИЦЫ

2741. Два неэлементарных интеграла. Корринтон (Two non-elementary definite integrals. Corrington M. S.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 42, 129—130 (англ.)

Интегралы

$$\int_0^x t^t dt, \quad \int_0^x t^{-t} dt$$

вычисляются при помощи таблиц неполной гамма-функции. Приведены таблицы для $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 1{,}0$ с восемью десятичными знаками после запятой.

М. Л. Бродский

2742. Смитсоновские таблицы эллиптических функций. Спенсли, Спенсли [**Поправка к книге**]. (Smithsonian elliptic functions tables. Spenceley G. W., Spenceley R. M., publ. № 3863, Washington, 1947), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 42, 106—107 (англ.)

Указывается, что целый столбец $E(\varphi, k)$ для $\theta = 18°$ вычислен в смитсоновских таблицах неверно. Приводится исправление.

2743 К. Таблицы многочленов Чебышева $S_n(x)$ и $C_n(x)$, $n = 2\ (1)\ 12$, $x = 0\ (001)\ 2$ (Tables of Chebyshev polynomials $S_n(x)$ and $C_n(x)$, $n = 2\ (1)\ 12$, $x = 0\ (001)\ 2$. National Bureau of Standards, Applied Mathematics. Ser. 9, pp. 161, Government Printing Office, Washington, 1953, 1.75 doll.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 489 (библ.)

2744 К. Таблица функций Бесселя — Клиффорда порядков 0 и 1 (Table of Bessel — Clifford functions of orders zero and one. National Bureau of Standards, Applied Mathematics. Ser. 28, pp. 72, Order from Government Printing Office, Washington, 1953, 45 c.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 489 (библ.)

См. также: 2473, 2570, 2588, 2589, 2592, 2603, 2628, 2653, 2656, 2657, 2665, 2677

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

2745. «Мертвые» программы для автоматических вычислительных машин с магнитным барабаном. Пул (Dead programmes for a magnetic drum automatic computer. Poel W. L. van der), Appl. Scient. Res., 1953, **B3**, № 3, 190—198 (англ.)

Предлагается использовать часть запоминающего устройства вычислительной машины с магнитным барабаном для постоянного хранения часто употребляющихся подпрограмм. Эта часть запоминающего устройства называется «мертвой памятью», а подпрограммы, хранящиеся в ней,— «мертвыми под-

программами». Изучается техника использования в машине «мертвых подпрограмм», в частности использование переменных команд и команд возвращения в общую программу. Техника программирования иллюстрируется на примере машины, описанной автором ранее (Appl. Scient. Res., 1952, B2, 367). *Н. П. Жидков*

2746. Техника диагностического программирования для машины ИБМ-701. **Уолтерс** (Diagnostic programming techniques for the IBM type 701 E.D.P.M. Walters L. R.), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, ч. 7, 55—58 (англ.)

Излагаются вопросы, связанные с контролем работы быстродействующих вычислительных машин на опыте эксплуатации машины ИБМ-701 (РЖМат, 1954, 2375). Для этой цели служат диагностические программы, различные проверочные процедуры и проверочное оборудование.

Диагностические программы проверяют все логические операции, выполняемые машиной, и, в случае обнаружения ошибки, дают возможность определить место неисправности. Рассматриваются общие вопросы использования таких программ, достоинства и недостатки электронного проверочного оборудования.

Далее рассматриваются контроль записи на магнитных лентах и контроль электростатической памяти (на электроннолучевых трубках) и, в частности, возможность использования памяти машины для проверки ее самой, а также методы определения места неисправности, затем описываются методы запрограммированного контроля. На некоторые из указанных методов приводятся краткие примеры.

В заключение автор отмечает, что приведенные в статье программы с пользой употреблялись для проверки машины, однако с накоплением опыта, вероятно, будут изменены. *Н. П. Трифонов*

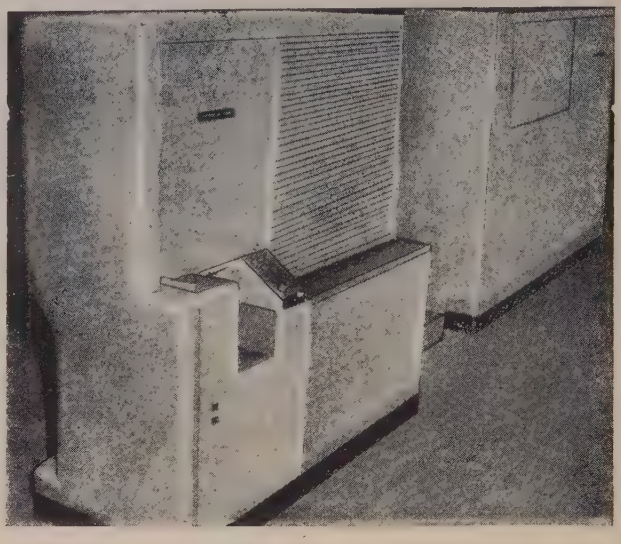
2747. Электронная вычислительная машина типа 409-2 фирмы «Ремингтон Ранд». **Кросман** (The Remington Rand type 409-2 electronic computer. Crosman Loring P.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1332—1340 (англ.)

Электронная вычислительная машина с программным управлением «Ремингтон Ранд» типа 409-2 (см. фото) составлена по блочному принципу. В машине принято 40 типовых элементарных операций и 6 специальных операций. Кодирование команд осуществляется по пятиадресной системе. Арифметическое устройство выполнено на электронных лампах (триодах). Оперативная (промежуточная) память выполнена на реле.

Ввод данных в машину осуществляется с перфокарт. Вывод данных производится на перфокарты. Постоянные величины вводятся при помощи декадных коммутаторов. Машина имеет контрольное устройство, позволяющее оператору следить за ее работой. Работа машины может быть остановлена и начата вновь в любое время вычислительного цикла.

Контроль правильности работы машины производится автоматически после каждой операции методом повторения операции в обратном порядке. При правильном вычислительном процессе поверочный результат будет равен 0, и машина производит следующую операцию. Если результат отличен от 0, то машина повторяет операцию.

Общее число электронных ламп, употребляемых в машине, составляет 2604; из них 1128 — газовые диоды с холодным катодом.



Большинство из этих электронных ламп спроектировано и изготовлено специально для вычислительных машин. Общее количество реле, применяемых в машине, составляет 428. *В. С. Митрофанов*

2748. Схемы, использованные в машинах СЕАК и ДИСЕАК. **Элбурн, Уитт** (Dynamic circuit techniques used in SEAC and DYSEAC. Elbourn Robert D., Witt Richard P.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1380—1387 (англ.)

В построенных Национальным бюро стандартов (США) машинах СЕАК (SEAC) и ДИСЕАК (DYSEAC) все логические операции выполняются на схемах с германиевыми диодами, все временное хранение — на электрических линиях задержки и усиление — на электронных лампах. При конструировании применен блочный принцип. Стандартный ламповый блок включает в себя импульсный усилитель с трансформаторной нагрузкой на лампе 6AN5 и несколько дешифраторов типа «И» и «ИЛИ» на германиевых диодах. Такой блок может служить динамическим триггером, если выход его через линию задержки и дешифратор подать обратно на вход. Группа блоков, соединенных последовательно через линии задержки, образует однокодовый регистр, который может сдвигать коды, выбирать их из запоминающего устройства, а также выдавать их в него последовательно либо параллельно. Стандартная линия задержки имеет волновое сопротивление 1350 *ом* и задержку 0,25 *мксек*. Стандартный блок линий задержки имеет одну секцию на 0,75 *мксек* и 12 секций по 0,25 *мксек*.

Описаны конструктивные особенности линий задержки и их работа. Рассматривается работа импульсного усилителя с трансформаторной нагрузкой. Приведены параметры трансформаторов, свойства их ферритовых сердечников, схема сдвигающего регистра, собранного на стандартных ламповых блоках, а также характеристики лампы 6AN5.

Л. С. Легезо

2749. Вычислительная машина за 62 500 долларов («Giant Brain» for 62 500 doll.), Text. World, 1953, **103**, № 3, 248 (англ.)

Компания «Электроник Компьютор Корпорейшн» выпустила в продажу новую вычислительную машину ЭЛЕКОМ-100 (РЖМат, 1954, 1857—1859), которая имеет управляемый объем памяти на 102 400 девятизначных кодов и может решить 10-значную математическую задачу за 3 *мсек*. Эта вычислительная машина имеет относительно небольшие размеры. Цена ее 62 500 долларов. Она состоит из трех блоков: пульта управления в виде обычного письменного стола, за которым сидит оператор, блока запоминающего устройства с магнитным барабаном и собственно вычислительной машины, которая размещена в пяти стальных шкафах, соединенных в полукруг. Машина работает на переменном токе 120 *в*; ее можно легко передвигать, так как блоки установлены на роликах.

2750. Установка двух новых электронных вычислительных машин (Two new 11-ton electronic calculators...), Western Aviat., 1953, **33**, № 5, 8 (англ.)

Две новые электронные вычислительные машины ИБМ будут в ближайшее время установлены фирмой «Дуглас» (Douglas Aircraft Co.) на ее заводах в Санта-Моника и в Эль-Сегундо. Арендная плата составляет 15 000 долларов за каждую машину в месяц.

2751. Новая вычислительная машина (A new computer), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 4, 318 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 1842, 1843.

2752. Дискуссия об электронных вычислительных машинах на заседании Лондонского отделения Британского института радиоинженеров 5-го ноября 1952 г. (Discussion on «Electronic computers». London Section meeting, 5-th November 1952), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1953, **13**, № 2, 110—112 (англ.)

Краткое содержание выступлений на дискуссии по поводу доклада Бутса (Booth A. D.) — руководителя работ по проектированию и постройке электронной вычислительной машины в Биркбек-колледже (Birkbeck College Electronic Computer Project).

Приведены некоторые эксплуатационные показатели вычислительной машины АКЕ (ACE) Национальной физической лаборатории (Англия), схема усилителя постоянного тока и клапана на последовательно соединенных двойных триодах, использованных в машине. Машина АКЕ (РЖ Мат, 1954, 2408, 2416) находится в эксплуатации с начала 1952 г. В ней насчитывается 1095 электронных ламп, 42 тиратрона, 300 кристаллических диодов и 10 000 других деталей. За 1800 час. работы вышло из строя 132 лампы, 21 тиратрон, 27 диодов и 107 других деталей (в том числе 13 конденсаторов и 66 непроволочных сопротивлений).

Указано, что вычислительная машина Биркбек-колледжа имеет около 400 ламп. Схемы в машине рассчитаны на широкий разброс параметров ламп. За первые четыре месяца работы вышли из строя две лампы из-за пробоя подогревателя на катод.

Автор доклада утверждает, что число ламп в машине Биркбек-колледжа в два раза меньше по сравнению с аналогичными ей машинами и что частью это достигнуто за счет логического метода синтеза схем, изложенного в его докладе. Текст доклада опубликован (Booth A. D., J Brit. Instn Radio Engrs, 1952, **12**, № 12, 587—594). *Н. Я. Матюхин*

2753. Применение электронных схем в быстродействующих цифровых машинах. Бланден, Кит, Спиди (The application of electronic techniques to high speed digital computors. Blunden W. R., Keith R. J., Speedy C. B.), J. Instn Engrs, Australia, 1953, **25**, № 12, 11—18 (англ.)

Приводится краткая классификация машин по принципу действия и системам представления чисел.

Описывается принцип действия последовательной двоичной электронной вычислительной машины и ее основных узлов.

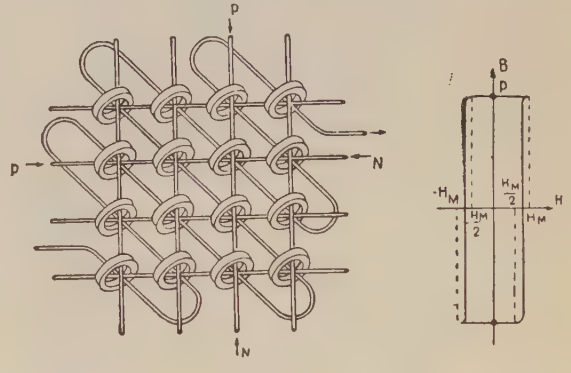
Рассматриваются применяющиеся в настоящее время запоминающие устройства: 1) триггерная ячейка, 2) устройство на электроннолучевых трубках, 3) устройство на магнитном барабане, 4) устройство на акустических линиях задержки.

Описаны элементарные счетные схемы, применяющиеся в быстродействующих машинах.

Н. Я. Матюхин

2754. Запоминающее устройство на 10 000 ферритовых сердечниках. Райхман (A myriabit magnetic-core matrix memory. Rajchman Jan A.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1407—1421 (англ.)

Устройство использует в качестве запоминающих элементов ферритовые сердечники с прямоугольной гистерезисной петлей (фиг. 1). Устройство состоит из 10 000 сердечников, которые имеют форму тороидов с внешним диаметром 1,37 *мм*, внутренним диаметром 0,86 *мм* и высотой 0,41 *мм*. Сердечники прессуются и затем отбираются на специальном испытательном стенде. Все 10 000 сердечников занимают площадь 25,4 × 25,4 *см*. Насыщением сердечника в одном направлении производится запись «1», насыщением в обратном — «0». При считывании «1» сердечник перемагничивается, так что необходима перезапись. Устройство работает на принципе совпадения токов (только при наличии токов в двух обмотках сердечника происходит считывание или запись информаций).



Фиг. 1

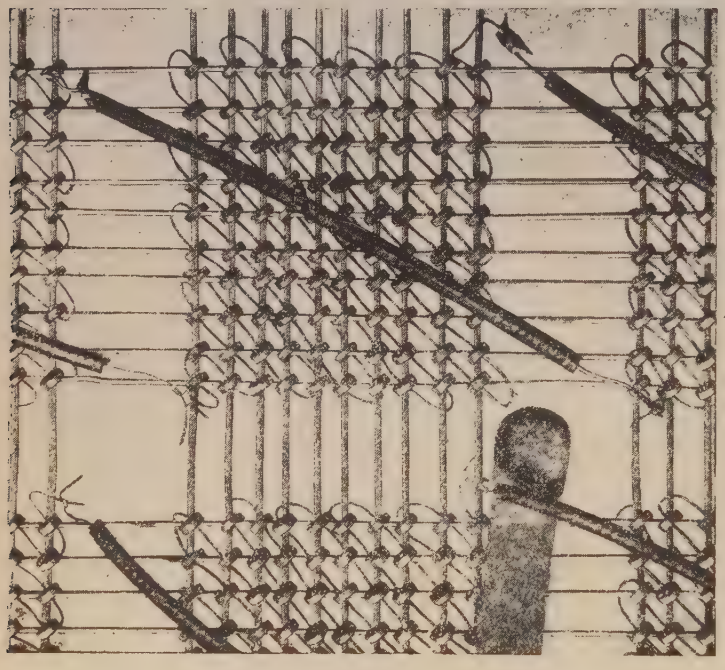
Для насыщения сердечника требуется 1,1 ампер витка и энергия $5 \cdot 10^{-8}$ *дж*. Для питания всех сер-

дечников импульсами тока необходимо 400 электронных ламп с током 550 *ма* на каждую. При применении магнитных переключателей число ламп снижается до 40 с током 275 *ма* на каждую.

Магнитный переключатель имеет 10 сердечников из молибденового пермаллоя. Внешний диаметр сердечника 8 *мм*, внутренний 4,8 *мм*, ширина пермаллоевой ленты 3,2 *мм*, толщина около 3 μ.

Магнитный переключатель работает по такому же принципу совпадения токов, как и запоминающее устройство.

Рассматриваются два метода записи и чтения: лучший из них дает отношение полезного сигнала к помехе, равное 25 : 1. На выбор и восстановление прежнего состояния элемента запоминающего устройства необходимо время 12,5 μсек. Указываются пути уменьшения времени выбора. При изменении системы управления имеется возможность выбора нескольких элементов одновременно. Описывается конструкция устройства. Приводятся блок-схема вспомогательного устройства управления и результаты испытания запоминающего устройства. На фиг. 2 изображена часть запоминающего устройства, сфотографированная в увеличенном виде; в правом нижнем углу для сравнения показана спичечная головка.



Фиг. 2

В. В. Карибский, К. К. Чиркова

2755. **Применение ферритовых сердечников увеличивает скорость вычисления на цифровых вычислительных машинах. Браун, Альберс-Шонберг** (Ferrites speed digital computers. Brown David R., Albers-Shoenberg Ernst), Electronics, 1953, 26, № 4, 146—149 (англ.)

Рассматриваются принципы построения запоминающего устройства с использованием ферритовых сердечников при параллельном способе считывания и записи чисел. Запоминающее устройство выполняется в виде ряда сеток, построенных на ферритовых сердечниках, причем количество сеток соответствует числу двоичных разрядов, принятому для данной машины. Каждая сетка содержит определенное количество горизонтальных и вертикальных шин, на пересечении которых располагаются сердечники, имеющие по три обмотки: две входные и одну выходную. Входные обмотки каждого сердечника связаны с соответствующими горизонтальной и вертикальной шинами. Выходные обмотки сердечников каждой сетки объединяются.

Операция считывания кода чисел осуществляется параллельно путем подачи на одну вертикальную и одну горизонтальную шины всех разрядов двух импульсов совпадения отрицательной полярности. В тех сердечниках, где находился код «1», в результате подачи импульсов считывания произойдет изменение магнитного потока, вследствие чего в выходных обмотках наводится ток.

Импульсы, снимаемые с выходных обмоток, поступают в определенные триггеры регистра, с которого число поступает в дальнейшем в арифметическое устройство.

Импульсы совпадения выдаются с горизонтального и вертикального дешифраторов, также построенных на сердечниках и выбирающих числа в зависимости от кода адресов, устанавливаемых на них. Запись чисел происходит путем подачи на выбранные шины импульсов совпадения положительной полярности.

Приводится фотография экспериментального устройства из 16 × 16 сердечников и характеристики ферритовых сердечников.

В. Н. Аверин

2756. **Усилитель импульсов на полупроводниковом триоде с внешним восстановлением формы импульса. Вогелсонг** (A transistor pulse amplifier using external regeneration. Vogelsong J. H.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 10, 1444—1450 (англ.)

Усилитель использует полупроводниковый триод с точечными контактами и предназначен для работы при основной частоте повторения импульсов 3 *Мгц*. На дополнительный вход усилителя подается синхронизирующее синусоидальное напряжение с амплитудой 7в и частотой 3 *Мгц*. Диодная схема, имеющаяся на входе, и цепочка обратной связи выполнены так, чтобы при условии, что входной сигнал начинается несколько раньше положительной полуволны синхронизирующего напряжения, момент начала выходного импульса, его форма и длительность зависели только от синхронизирующего напряжения; длительность выходного импульса при этом 0,17 μсек.

Режим полупроводникового триода выбран в соответствии с приведенными вольт-амперными характеристиками с таким расчетом, чтобы величина тока коллектора не заходила далеко в область насыщения,

что предотвращает расширение импульса из-за накопления «дырок».

Входное сопротивление усилителя нелинейно. При напряжении на входе 4 *в* ток, потребляемый входной цепью, составляет 6,5 *ма*.

Для согласования выхода усилителя с нагрузкой применяется трансформаторная связь. Усилитель удовлетворительно работает на линейную нагрузку с сопротивлением 500 *ом* или на соединенные параллельно входы четырех аналогичных усилителей. При надлежащем выборе параметров трансформатор обеспечивает также восстановление постоянной составляющей.

Мощность, потребляемая усилителем от источника синхронизирующего напряжения, около 12 *мвт*. От источника постоянного напряжения —18 *в*, питающего цепь коллектора, полупроводниковым триодом потребляется не более 50 *мвт*; в других элементах схемы рассеивается мощность около 25 *мвт*, потребляемая от источников постоянных напряжений —6 *в*, —1*в*, —0,5 *в*, +3 *в*.

Схема усилителя может быть выполнена в двух вариантах. Время нарастания импульса во втором варианте меньше, чем в первом. Если, однако, вместо синусоидального напряжения использовать для синхронизации прямоугольные импульсы, разница между тем и другим вариантом исчезает. В расчетах времени нарастания импульса учтено только изменение взаимного импеданца полупроводникового триода в зависимости от частоты, причем полупроводниковый триод для расчета был заменен *T*-образной схемой замещения. Индуктивности и емкости, имеющиеся в схеме, а также паразитные емкости кристалла из расчетов исключены.

М. А. Карцев

2757. Британская промышленная ярмарка. Фирма «Ферранти» (British industries fair. Ferranti, Ltd.), Engineer, 1953, **195**, № 5076, 659 (англ.)

Фирма «Ферранти» выставила считывающее устройство, предназначенное для работы с электронными вычислительными машинами. Скорость считывания до 200 знаков в 1 сек. Лента передвигается скачкообразно при помощи электромеханического устройства. Считывание производится фотоэлектрическим методом, параллельно с нескольких дорожек (с пяти или семи). Выходные данные получаются в виде электрических импульсов с амплитудой от 10 *в* до 20 *в*.

Считывающее устройство имеет размеры 300 × × 230 × 215 *мм* и вес 12,6 *кг*. Приведена фотография.

Е. А. Волков

2758. Считывающее устройство для вычислительных машин с прерывистым движением ленты. Уэлби (Intermittent-freed computer tape reader. Welby B. G.), Electronics, 1953, **26**, № 2, 115—117 (англ.)

Дается подробное описание считывающего устройства для перфоленты фирмы «Ферранти» (см. реф. 2757). Приводятся схемы электромеханической системы, приводящей в движение ленту, электронной части управления этой системой, фотоэлектрической и оптической систем считывания.

Для продвижения и остановки ленты используются электромагнитная муфта и тормоз. За счет малой инерции подвижных частей обеспечен практический мгновенный набор скорости или остановка ленты. Для сообщения остановленной ленте максимальной скорости, продвижения ее на один шаг-остановки ленты и считывания требуется 6 *мсек*. Управление пуском и остановкой осуществляется при помощи триггера, указывающего, какую из этих операций выполнять, и сигналов, получаемых от фотоэлемента, расположенного под ведущими отверстиями перфоленты. Даны три фотографии: общий вид считывающего устройства, фотоэлектрическая система и электромеханическая система передвижения ленты.

Считывающее устройство «Ферранти» предназначено для вычислительной машины той же фирмы, однако оно может быть использовано и для других цифровых вычислительных машин.

Е. А. Волков, Н. Я. Матюхин

2759. Интерес к устройству ввода с перфоленты английской вычислительной машины (Interest in british computer tape reader), Mach. Lloyd Overseas Ed., 1953, **25**, № 9, 138 (англ.)

Отмечается публикация в журнале Electronics статьи, дающей описание считывающего устройства «Ферранти» (см. реф. 2757).

Н. М.

2760. Выставка приборов. Фирма «Ферранти» (Instrument exhibition.— Ferranti, Ltd.), Electr. J., 1953, **150**, № 26, 2282 (англ.)

В отчете о второй британской выставке приборной промышленности в Лондоне 30 июня — 11 июля 1953 г. указывается, что фирма «Ферранти» среди других приборов экспонировала оборудование электронных вычислительных машин (пульт управления и быстродействующее читающее устройство, см. реф. 2757), а также модель полной машины.

2761. Высокостабильный источник питания для вычислительных машин (Precision power for computers), Aviat. Week, 1953, **58**, № 2, 56 (англ.)

Сообщение фирмы «Инэт» (Inet, Inc.) о выпуске мощного высокостабильного источника питания для вычислительных машин. Стабильность выходного напряжения 0,15% при изменении нагрузки от нуля до максимальной и при изменении напряжения питающей сети ±10%. Динамическая стабильность напряжения в зависимости от колебаний тока нагрузки и питающего напряжения не ниже 0,2%. Фон переменного тока не выше 0,5%. Стабилизация напряжения осуществляется магнитным усилителем с селеновыми выпрямителями. Отсутствие электронных ламп, тиратронов и т. п. позволило повысить к. п. д. выпрямителя до 75% и значительно увеличить его надежность. Наличие специальной схемы для мгновенного динамического регулирования обеспечило отсутствие выбросов выходного напряжения при резких колебаниях напряжения сети или тока нагрузки. Выпрямители выпускаются на выпрямленные токи от 5 *а* до 200 *а* и напряжения от 6 *в* до 500 *в*.

Н. Я. Матюхин

2762. Стабильный источник питания для вычислительных машин (Precision power supply for computers, etc), Instruments, 1953, **26**, № 2, 226 (англ.)

См. реф. 2761. Приведено фото.

2763. Пентод с резкой отсечкой (Sharp cutoff pentode), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 4, 27 (англ.)

Сообщение фирмы «Сильвания» (Sylvania Electric Products Inc.) о выпуске пентодов с резкой отсечкой типа 6145, частично предназначенных для использования в электронных вычислительных машинах.

Пентод обладает высоким анодным током при нулевом смещении, малыми междуэлектродными емкостями, стабильностью характеристик и требует низких питающих напряжений. *Н. Я. Матюхин*

2764. **Диоды, компаундированные под вакуумом** (Vacuum-impregnated diodes), TV and Radio Engng, 1953, **23**, № 3, 6 (англ.)

2765. **Двойные триоды для вычислительных машин ИБМ** (Twin triodes for IBM computers), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 6, 30 (англ.)

Сообщается о широком использовании в вычислительных машинах фирмы «ИБМ» (IBM) двойных триодов с малым внутренним сопротивлением типа GL-5965 фирмы «Дженерал Электрик» (General Electric). Триоды 5965 составляют около двух третей общего количества ламп в вычислительной машине ИБМ-701 (РЖМат, 1954, 1853—1856).
Н. Я. Матюхин

2766. **Пути дальнейшего развития вычислительных машин. Беркли** (Avenues for future developments in computing machinery. Berkeley Edmund C.), Computers and Automation, 1953, **2**, № 3, 19—20 (англ.)

В краткой заметке перечисляется ряд наиболее существенных, по мнению автора, направлений дальнейшего развития вычислительных машин:

1) Дальнейшая разработка конструкций цифровых машин, являющихся одновременно моделирующими устройствами.

2) Развитие новых типов запоминающих устройств и, в частности, устройств, использующих для запоминания цифр полупроводниковые триоды и магнитные сердечники.

3) Разработка методов осуществления программирования самими вычислительными машинами.

4) Расширение области применения вычислительных машин и, в частности, использование их для переводов с одного языка на другой, для решения логических задач и т. п.

5) Разработка методов имитации поведения животных при помощи вычислительных автоматов. Например, разрешение задачи «восприятия» и «различения» букв и цифр.

Автор считает наиболее важным последнее из перечисленных направлений, т. е. комбинирование вычислительной машины с автоматом, выполняющим определенные действия.

Заметка не содержит научного обоснования даваемого прогноза направлений дальнейшего развития вычислительных машин, а лишь ставит перед конструкторами вычислительных машин проблемы, часть которых продиктована «кибернетическими» интересами автора. *В. И. Шестаков*

2767. **Управление в цифровых машинах. Стернлайт** (Control in digital computers. Sternlight David), Techn. Engng News, 1953, **34**, № 8, 36—37 (англ.)

Приводятся краткие сведения о принципах управления цифровыми вычислительными машинами и о назначении команд.

Кратко обсуждается вопрос о возможностях использования цифровых машин для автоматизации производственных процессов, для диспетчерской службы на воздушных линиях и т. д.
Н. Я. Матюхин

2768. **Электронный переводчик** (Interprète électronique), Haut-parleur, 1953, **29**, № 939, 4 (франц.)

Сообщение о разработке в Калифорнийском университете в Лос-Анжелосе проекта электронной машины для перевода с одного языка на другой (см. РЖМат, 1954, 2394).

2769. **Отчеты составляются с поразительной быстротой** (Management reports at electronic speed), Railway Age, 1953, **134**, № 20, 73 (англ.)

Сообщение о том, что электронная сортировка «Ремингтон Ранд» работает со скоростью 800 карточек в 1 мин. Приведена фотография.

2770. **Летняя школа по автоматическим вычислениям в Кембридже** (Cambridge summer school in automatic computing), Electronic Engng, 1953, **25**, № 305, 305 (англ.)

В математической лаборатории Кембриджского университета в сентябре 1953 г. работала летняя школа по программированию.

2771. **Гармонический анализатор. Мак-Донал** (A Fourier analyzer. McDonal F. J.), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 4, 272—276 (англ.)

Прибор был построен для гармонического анализа процессов при сейсмической разведке нефти.

Анализируемая функция записывается при помощи специального осциллографа на пленку не в виде линии, а так, что функция определяется границей между светлой и темной областями. При анализе свет от лампы проходит через систему линз, а затем пленку и попадает на фотоэлемент. Сила света при этом оказывается пропорциональной записанной функции. Ток от фотоэлемента затем усиливается двухкаскадным электронным усилителем с двухтактным выходом и попадает на прецизионный потенциометр, движок которого движется по закону синуса или косинуса синхронно с вращением пленки. Частота определяется заданным отношением передач коробки скоростей. Интегрирование произведения происходит при помощи электромеханического интегратора с электродвигателем и тахогенератором с обратной связью. Пуск и остановка интегратора производятся автоматически электронной схемой, запускаемой от отметок на пленке. Точность анализа прямоугольного импульса 0,2% от максимальной амплитуды. *Н. В. Корольков*

2772. **Интегрирование продолжительных процессов при помощи электроннолампового интегратора. Лос** (Integrace déle trvajících průběhů elektronkovým integrátorem. Loos Rudolf H.), Slaboproudý obzor, 1953, **14**, № 6, 277—280 (чеш.; резюме русск., нем., англ., франц.)

Описана схема интегрирующего усилителя с электрометрической лампой. Интегрирующий усилитель предназначается для вычисления определенных интегралов от напряжения за период времени от 50 мсек до нескольких минут и может быть использован как

баллистический гальванометр. В схеме предусмотрена обратная связь при помощи гальванометра и фотоэлемента. Благодаря действию этой обратной связи устраняется экспоненциальный множитель, присущий интегрирующим контурам типа *RC*.

Н. В. Корольков

2773. Особый подход к вычислениям при помощи моделирующих устройств. Боннелл (Different approach to analog computation. Bonnell C. R.), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 5, 14—15, 31 (англ.)

В качестве интегрирующего элемента в моделях может быть использована динамическая механическая система, для которой угол поворота пропорционален интегралу по времени от вращающего момента. Подобная система применяется в электрических счетчиках. Механическая система с электромагнитным управлением позволяет весьма простыми способами производить операции умножения, возведения в квадрат, извлечения квадратного корня из суммы квадратов и некоторые другие. Применение механической системы иногда может упростить конструкцию электрической модели. Описание основного механического элемента отсутствует, приведено лишь несколько схем простейшего вида и некоторые результаты работы механического элемента, дающего ошибку порядка до 3%. Дана также фотография внешнего вида механического элемента вместе с дополнительным оборудованием.

Н. В. Корольков

2774. Прибор для опытов с мембранной аналогией. Шнейдер, Камбел (Membrane apparatus for analogic experiments. Schneider Paul J., Cambel Ali B.), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 7, 513—514 (англ.)

Дается описание прибора для решения уравнения Пуассона при нулевых граничных условиях при помощи мембранной аналогии. Используется мыльная пленка, кратко указывается способ измерения. Точность решения на этом приборе может быть доведена до 3%.

Р. Д. Бачелис

2775. Современные вспомогательные средства для вычислений. Мерреи (Modern aids to computation. Murray Warren), Kansas Engr, 1953, **37**, № 2, 18, 19, 30, 32, 34, 38, 40 (англ.)

Кратко описаны некоторые основные узлы механической машины для решения дифференциальных уравнений, а также простейшие элементы электронного моделирующего устройства.

Н. В. Корольков

2776. Малогабаритная вычислительная машина для фермеров (Miniature robot «brain» developed for farm use), Electr. Engng, 1953, sec. 1, **72**, № 5, 471—472 (англ.)

Сообщение о разработанном фирмой «Миннеаполис-Хонейвелл» (Minneapolis-Honeywell Regulator Co.) переносного моделирующего устройства для расчета температуры и влажности в постройках для содержания скота. Приведена фотография.

Н. Я. Матюхин

2777. Счетно-решающее устройство, не подверженное влияниям окружающей среды (Computer resolvers unaffected by environment), Aviat. Age, 1953, **19**, № 2, 98 (англ.)

Дополнительные сведения об электрическом решающем устройстве фирмы «Форд Инструмент» (РЖМат, 1953, 1470).

Устройство состоит из суммирующих усилителей с большим коэффициентом усиления и векторных построителей — вращающихся трансформаторов. Входные сигналы поступают на вход суммирующего усилителя. Напряжение на выходе усилителя питает одну из обмоток векторного построителя. Векторный построитель имеет один или два входа для механических величин, заданных в виде угловых перемещений, и один электрический вход для напряжения с выхода усилителя. Величина этого напряжения составляет от 0,25 *в* до 12 *в* переменного тока частотой 400 *гц*. Векторный построитель может давать на выходе одну величину (отрабатываемую следящей системой) в виде механического поворота ротора вращающегося трансформатора и две величины в виде электрических напряжений, снимаемых с обмоток построителя. Суммирующий усилитель может иметь до 8 входов для суммируемых величин.

Приведена фотография векторного построителя.

Ф. В. Майоров

2778. Прибор для преобразования непрерывных данных в цифровые (Analog-to-digital converter simplifies data reduction), Prod. Engng, 1953, **24**, № 5, 234—235 (англ.)

Сообщение фирмы «Консолидейтед» о преобразователе САДИК (SADIC 33-102), автоматически преобразующем непрерывно меняющееся входное напряжение в соответствующее цифровое значение.

Входное напряжение сигнала усиливается в приборе, сглаживается и подается затем на балансную схему. Одновременно с этим на балансную схему подается стабилизированное эталонное напряжение с трехдекадного потенциометра. С балансной схемы разность напряжений поступает на три шаговых искателя, переключающих трехдекадный потенциометр. Переключение потенциометра происходит до тех пор, пока напряжение сравнения не станет равным входному напряжению сигнала.

Момент наступления равновесия отмечается зажиганием индикаторных лампочек, показывающих значение напряжения сравнения или, что то же самое, значение напряжения входного сигнала. Кроме того, шаговые искатели переключают контакты печатающего или перфорирующего устройства, и выходные данные печатаются на ленте или пробиваются на перфокартах.

На преобразователь могут подаваться напряжения сигнала любой полярности, для чего предусмотрено переключение эталонного напряжения, питающего трехдекадный потенциометр. Усилитель преобразователя имеет переменный коэффициент усиления, что позволяет преобразовывать напряжения различной величины. Входное напряжение сигнала может лежать в пределах от 1 *мв* до 64 *мв*. Цифровые значения получаются с тремя десятичными знаками. Приводятся общий вид прибора и его блок-схема. См. также РЖМат, 1953, 945, 946.

В. Н. Аверин

Примечание редакции. Как видно из описания конструкции, данные о точности, приведенные в РЖМат, 1953, реф. 945, неправильны.

2779. Десятичный счетчик (Decimal scaler), Chem. and Engng News, 1953, **31**, № 20, 2150 (англ.)

Краткое сообщение о десятичном счетчике модель 2105 фирмы «Бекман Инструментс» (Beckman

Instruments), применяемом при измерениях радиоактивности.

2780. **Цифровой самописец с печатающим устройством** (Digital recorder has printed readout), Prod. Engng, 1953, 24, № 2, 222 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 1880.

2781. **Кибернетика. Реальные задачи и мистификация. Лантен** (La cybernétique: Problèmes réels et mystification. Lentin André), Pensée, 1953, **47**, mars — avril, 47 — 61 (франц.)

Дается резкая критика идеалистического реакционного направления появившейся в последние годы новой «науки» — кибернетики.

Автор указывает, что в связи с появлением машин нового типа, использующих автоматику и электронику, возникает необходимость развития новой теории, в достаточной степени абстрактной и обобщающей. Некоторые успехи в этом направлении уже имеются, например в виде математической теории связи (передачи информаций). Однако наряду с практически ценными результатами начали возникать механистические «теории», рассматривающие машины с электронным автоматическим управлением как модели живых существ (Норберт Винер и др.). В статье вскрывается реакционная сущность подобных теорий, принятых на вооружение воинствующим американским империализмом в его холодной войне против прогрессивной материалистической науки, в частности против учения Павлова.

К. А. Семендяев

2782. **Будут ли существовать роботы? (Кибернетика — новая наука). Эрлей** (Kommen die Roboter? Kybernetik — eine neue Wissenschaft. Oerley W. A.), Prisma, 1953, **7**, № 10, 459—462 (нем.)

Излагаются, в духе Винера, положения так называемой «кибернетики» (см. реф. 2781). Исходя из этих положений, автор занимается апологией капитализма, пытаясь представить социальные бедствия трудящихся (массовая безработица и нищета) как неизбежный результат технического прогресса, в частности автоматизации производства, а не как следствие капиталистического строя.

В. И. Шестаков

2783. **Кибернетика — наука, смежная с техникой и биологией. Дрейер** (Kybernetik — Wissenschaft im Grenzgebiet zwischen Technik und Biologie. Dreyer H.-J.), Umschau, 1953, **53**, № 10, 289—292 (нем.)

Излагаются, следуя Винеру, положения «кибернетики» (см. реф. 2781). Основное внимание автора привлекают ненаучные механистические аналогии между машинами с автоматическим управлением и живыми существами. *В. И. Шестаков*

2784. **Кибернетика в философии и на практике** (La cibernetica nella filosofia e nella pratica), Radio ind. e telev., 1953, **14**, № 7, 40 (итал.)

Краткое описание кибернетики в духе Винера (см. реф. 2781).

2785. **Кибернетика и функции мышления. Томсон, Слуцкин** (Cybernetics and mental functioning. Thomson R., Sluckin W.), Brit. J. Philos. Sci., 1953, **4**, № 14, 130—146 (англ.)

Критика претензий кибернетики на роль новой философской системы. *Я. С.*

2786 РжМ. **Счетные машины. Куффиньяль** (Les machines à penser. Couffignal Louis, pp. 158, Le Éditions de Minuit, Paris, 1952) [**Рецензия: Ванд** (Vand V.), Nature, 1953, **172**, № 4374, 371 (англ.)]

Книга содержит описание общих принципов и возможностей арифмометров, счетных машин, работающих на перфокартах, некоторых универсальных машин (машина Бабаджа, ЭНИАК, машина Института Паскаля) и моделирующих устройств (дифференциальный анализатор Буша). Рассмотрены операции умножения, деления и извлечения корня в двоичной системе счисления, а также логические операции.

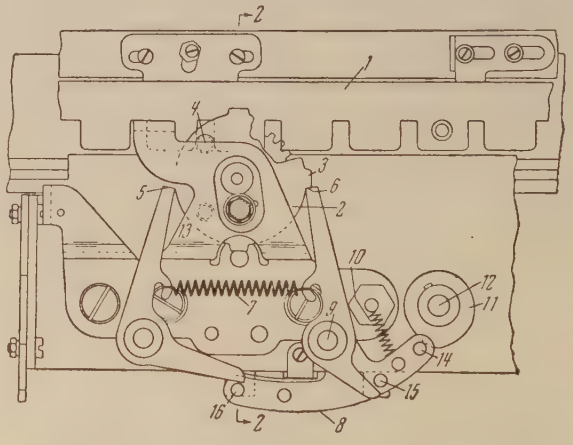
Имеются ошибки и опечатки. Отсутствуют библиографический указатель и ссылки.

2787 РжМ. **Проблемы развития счетных машин и интегрирующих устройств с программным управлением. Кремер** (Probleme der Entwicklung programmgesteuerter Rechengeräte und Integrieranlagen. Cremer H., S. 85, Technische Hochschule, Aachen, 1953) [**Рецензия: Саган** (Sagan H.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 27/28, 31 (нем.)]

2788 И. **Транспортный механизм каретки. Маттью** (Carriage shifting mechanism. Matthew Morton P.) [Friden Calculating Machine Co., Inc., Калифорния, США]. Пат. США 2636678, кл. 235—63, 28.04.53

Механизм может быть применен в любой счетной машине, у которой механизм ввода числа и счетный механизм перемещаются относительно друг друга. Механизм предназначается для перемещения основной каретки машины, на которой монтируется либо установочный, либо счетный механизм.

В него входят следующие элементы (см. фиг.):



1) каретка *1*, которая подлежит перемещению;

2) фигурная шайба *2*, свободно сидящая на оси и имеющая четыре квадратных выступа по окружности *3* и четыре штифта с внутренней стороны шайбы *4*;

3) вращающее устройство, сцепляющееся с фигурной шайбой (когда она отперта) при помощи фрикционной реверсивной муфты;

4) пара собачек *5* и *6*, сидящих на своих осях свободно; собачки, стягиваемые пружиной *7*, стараются повернуться навстречу друг другу, но этот поворот ограничен рабочей поверхностью фигурной шайбы *2*;

5) двуплечий рычаг *8*, свободно сидящий на оси *9*; этот рычаг пружиной *10* прижимается к эксцентрику *11*;

6) кулачок *11*, жестко посаженный на ось *12*;

7) рамка *13*, на которой крепятся элементы транспортного узла и которая в то же время является ограничителем хода каретки, когда последняя приходит в крайнее положение.

В исходном положении механизма двуплечий рычаг *8* находится в крайнем правом положении и штифтом *14* прижимается к минимальному радиусу кулачка *11* (выключенное положение кулачка). Собачки *5* и *6*, упираясь в квадратные выступы шайбы *2*, удерживают последнюю в неподвижном положении. Такое принудительное запирание фигурной шайбы вызывает расцепление ее с вращающим устройством. Один из штифтов *4*, заходя в прорез гребенки каретки *1*, удерживает ее в неподвижном состоянии. Гарантированная фиксация каретки необходима в момент работы счетчиков, так как смещение каретки во время счета может вызвать поломку машины.

Однако при умножении и делении операции счета чередуются с поразрядным перемещением каретки.

В описанном устройстве перемещение каретки включается поворотом кулачка *11*, который, поворачиваясь, отжимает через рычаг *8* (штифтами *15* и *16*) собачки *5* и *6*, отпирая тем самым шайбу *2*. Последняя сцепляется с вращающим устройством и, поворачиваясь, своими штифтами *4* перемещает транспортную каретку *1*.

При перемещении каретки на один шаг шайба повернется на одну четверть оборота. Угол поворота шайбы при перемещении каретки зависит от угла вращения и скорости кулачка *11*

При перемещении каретки на один шаг кулачок совершает однократное качательное движение, при многократном — многократное (под качательным движением кулачка понимается поворот его на определенный угол и возвращение его в исходное положение).

При освобождении каретки (т. е. при перемещении каретки сразу на всю длину) кулачок поворачивается на фиксированный угол и остается в этом положении до конца хода каретки.

Е. А. Александрова

2789 П. Вычислительное устройство. Леман (Computing device. Lehmann Jules) [Radio Corporation of America, A Corporation of Delaware]. Пат. США 2634909, кл. 235—61.5, 31.03.53

Устройство для преобразования прямоугольных координат x и y, заданных в виде напряжений, в полярные координаты α и ρ. Дана схема для получения угла α, состоящая из типовых элементов моделирующих устройств. В нее входят четыре множительных устройства, два интегратора, усилитель перемены знака и суммирующий усилитель с большим коэффициентом усиления, отрабатывающий сигнал ошибки преобразования, который управляет следящей системой, состоящей из перечисленных выше элементов.

Третий интегратор, подключенный к системе, вырабатывает в виде напряжения угол α. С выходов двух упомянутых выше интеграторов можно одновременно снимать напряжения, пропорциональные $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Н. Я. Матюхин

2790 П. Электронное устройство для сравнения данных (Electronic data comparator) [The British Tabulating Machine Co., Ltd.]. Австрал. пат. 151042, кл. 05.5, 7.05.53

Электронная схема, сравнивающая две пары напряжений, соответствующие определенным величинам. Схема использует два диода, которые при одних условиях сравнения пропускают входной импульс и блокируют его при других.

В. Н. Аверин

2791 П. Электронный счетчик (Electronic counter) [The British Tabulating Machine Co., Ltd.]. Австрал. пат. 151498, кл. 05.5, 4.06.53

Импульсный электронный счетчик для алгебраического сложения чисел имеет устройство, срабатывающее в том случае, если очередное число, поступающее в счетчик, имеет знак, противоположный знаку числа, находящегося в счетчике. При срабатывании указанного устройства код числа в счетчике переводится в дополнительный, после чего происходит суммирование.

В. Н. Аверин

См. также: 2475, 2476, 2485 К, 2674

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

2792. Из истории наших цифр. Несвадба (Z historie našich číslic. Nesvadba Jindřich), Svět techn., 1953, 4, № 6, 372—374 (чеш.)

Популярное изложение некоторых сведений из истории систем счисления. Встречаются ошибочные утверждения и неточности.

И. Н. Веселовский

2793. О математических работах Насиреддина Туси. Розенфельд Б. А., Изв. АН Азерб. ССР, 1953, № 4, 35—50 (азерб.)

В «Изложении Евклида» — переработке «Начал» Евклида, принадлежащей азербайджанскому математику и астроному Насиреддину Туси (1201—1274), большой интерес представляют учение о параллельных и теория отношений величин. Попытка Туси в первой редакции переработки «Начал» (араб. текст, Рим, 1594; неполный лат. перевод, Рим, 1657) доказать евклидов постулат о параллельных сыграла большую роль в подготовке создания неевклидовой геометрии, оказав сильное влияние на Валлиса и Саккери. Туси, повидимому, остался неудовлетворен своим доказательством и во второй редакции переработки «Начал» (араб. текст, Тегеран, 1881) заменил евклидов постулат другим: две расположенные в одной плоскости прямые, расходящиеся в одном на-

правлении, не могут в этом направлении сходиться.

В теории отношений Туси пришел к чуждой Евклиду трактовке отношений несоизмеримых величин как чисел, т. е. к расширению понятия о действительном числе. В обоих направлениях Туси развивал идеи таджикского ученого и поэта XI—XII вв. Омара Хайяма. В «Трактате о полном четырехстороннике» (русск. перевод, Баку, 1952) Туси завершил решение основных задач сферической тригонометрии на основе так называемой теоремы Менелая. Туси особенно способствовал выделению тригонометрии в самостоятельную математическую науку и оказал большое влияние на ее развитие в странах Западной Европы.

По сравнению с русским текстом работы автора, опубликованной в «Историко-математических иссл - дованиях» (1951, вып. 4, 489—512), настоящая статья содержит и некоторый новый материал, относящийся к римскому изданию «Изложения Евклида» Насиреддина. *А. П. Юшкевич*

2794. **Памяти А. А. Андронова. Горелик Г. С.,** Усп. физ. наук, 1953, **49**, № 3, 449—468

Излагается биография А. А. Андронова, выдающегося советского ученого в области теории колебаний. Освещается его научная, педагогическая и общественная деятельность. Приводится список опубликованных работ (37 названий).

2795. **Выдающийся советский ученый (К 65-летию со дня рождения В. П. Ветчинкина). Виноградов Р.,** Вестн. Возд. Флота, 1953, № 6, 71—76

Краткий очерк о научной деятельности В. П. Ветчинкина.

2796. **15 августа 1953 г. исполнилось 90 лет со дня рождения... Алексея Николаевича Крылова.** (1953 წლის 15 აგვისტოს 90 წელი შესრულდა... ... ალექსი ნიკოლოზის-ძე კრილოვის დაბადებიდან), მეცნიერება და ტექნიკა (Мецниереба да техника), 1953, № 8, 45—46 (груз.)

2797. **Валериан Иванович Курдюмов (100 лет со дня рождения). Генделъ Э. М.,** Строит. пром-сть, 1953, № 12, 41—42

Краткий очерк жизни и научно-педагогической деятельности В. И. Курдюмова с перечнем его трудов.

2798. **К 70-летию со дня рождения Рихарда Мизеса. Баш** (Richard von Mises zum 70. Geburtstag. Basch Alfred), Österr. Ingr-Arch., 1953, **7**, № 2, 73—76 (нем.)

Краткий очерк жизни и деятельности Рихарда Мизеса, написанный по поводу его 70-летия (род. 19 апреля 1883 г.). *И. Г. Башмакова*

2799. **Рихард Мизес. Баш** (Richard von Mises Basch A.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 27/28, 1—2 (нем.)

Некролог Рихарда Мизеса (скончался 14 июля 1953 г. в Бостоне). *И. Г. Башмакова*

2800. **Профессор Людвиг Прандтль** (Professor Ludwig Prandtl), Engineering, 1953, **176**, № 4570, 275—276 (англ.)

Некролог известного немецкого механика Людвига Прандтля (1875—1953). *И. Г. Башмакова*

2801. **Речь, посвященная памяти знаменитого математика Сальваторе Пинкерле. Сегре** (Discorso commemorativo dell'insigne matematico Salvatore Pincherle. Segre Beniamino), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, **4**, № 1—2, 3—10 (итал.)

Перепечатка речи, произнесенной Сегре (1947 г.) в связи с открытием в Болонском университете памятника выдающемуся итальянскому математику С. Пинкерле (1853—1936). *А. П. Юшкевич*

2802. **Георг Хамель. Шмейдлер** (Georg Hamel. Schmeidler W.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 27/28, 2—4 (нем.)

Краткий очерк жизни и деятельности немецкого механика и математика Георга Хамеля (родился в 1877 г.). *И. Г. Башмакова*

2803. **Научное творчество С. А. Чаплыгина. К 10-летию со дня смерти. Сретенский Л. Н.,** Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1953, № 1, 106—108

Перечисляются основные результаты работ С. А. Чаплыгина в области теоретической механики и гидроаэродинамики.

2804 К. **Труды Архимеда** (The works of Archimedes. Edit. Heath T. L., reissue of 1897 edition plus 1912 supplement, pp. 186+326+51, Dover, 1953, 4.95 doll.), Sky and Telescope, 1953, **12**, № 12, 321 (библ.)

2805 К. **Истинность и вывод в средневековой логике. Муди** (Truth and consequence in mediaeval logic. Moody A. (Studies in logic and the foundations of mathematics), S. 114, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1953, 3.25 doll.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 27/28, 28 (библ.)

См. также: 2469, 2477, 2691

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Алберс-Шонберг 2755
Александров П. С. 2537
Алем 2684
Ауман 2534

Б

Бак 2567
Бакс 2683
Бамбах 2720
Барон 2740 РЕЦ
Басоне 2646
Баш 2798, 2799
Бейд 2622
Бейкон 2657
Бём 2734
Беннетт 2588
Бер 2524, 2525, 2526
Бергман 2596 К
Берд 2607 К
Берже 2711
Беркли 2766
Бибербах 2580 К
Бинг 2544
Блакман 2673
Бланден 2753
Блашке 2696 К
Блох Э. Л. 2589
Блум 2532
Блэкман 2739 РЕЦ
Бобров А. А. 2637
Боннелл 2773
Бос 2661
Браун 2755
Брауэр 2517
Брдичка 2529
Бреннер-Хольцах 2735
Брусотти 2705
Буземан 2700 К
Бунгорд 2555
Бурбаки 2546 К
Бхаттачария 2661
Бялковский 2693

В

Ваге 2690
Вайда 2707
Ван-дер-Варден 2663
Ванд 2786 РЕЦ
Вейзе 2573 РЕЦ
Вейнгарден 2513
Вильнер И. А. 2729
Виноградов Р. 2795
Винтнер 2718
Витт 2531
Вогелсонг 2756
Вулих Б. З. 2618, 2619

Г

Гайер 2556, 2557
Гастин 2504
Гельфонд 2569
Гендель Э. М. 2797
Гёртлер 2476
Гершман С. Г. 2674
Гильберт 2597 К
Гинсберг 2548
Гири 2656
Гихман И. И. 2638
Годо 2703
Горбунов А. Д. 2575
Горелик Г. С. 2794
Готшок 2538
Гофман 2647
Градштейн 2578
Грайселл 2514
Григорьев И. Н. 2717 Д
Гринвуд 2633
Гупта 2687
Гурматай 2682

Д

Данжуа 2551 РЕЦ
Данкан 2533
Дейвид 2671 К
Дейвис 2645
Дейвис 2489
Деккер 2492
Деланж 2503
Дельтей 2605 К
Дес Радж 2659, 2660
Джонс 2508
Дивеев Р. Х. 2639, 2675
Добеш 2617
Добычин В. П. 2679
Дрейер 2783
Дубовицкий А. Я. 2582
Дьёдонне 2496
Дюамель 2594
Дюнген ван ден 2725
Дюпарк 2513

Е

Егудин Г. И. 2676
Емельянова Е. В. 2678

З

Закон 2550
Занден 2701 К
Зыков А. А. 2490

И

Иглиш 2688
Игнатьев У. В. 2631 Д
Исбелл 2539

К

Кавалларо 2686
Калаби 2540
Камалов М. К. 2652
Камбел 2774
Капрекар 2520
Карлесон 2574
Карлиц 2515, 2516, 2518, 2519
Катхиргаматамби 2653
Келлер 2692
Келли 2700 К
Кёниг 2573 РЕЦ
Керри 2730
Ким Е. И. 2590
Кит 2753
Кобер 2570
Кокаиа 2685
Кокстер 2509
Комаров А. Д. 2658
Конюс А. А. 2669
Кондратьев А. С. 2576
Копи 2497 К
Коррингтон 2741
Корсон 2715 К
Костюченко А. Г. 2624, 2710
Кошта 2598
Коэн 2494
Крагс 2724
Красовский Н. Н. 2581 Д
Крбек 2713
Кремер 2787 РЕЦ
Кригер Н. И. 2678
Кросман 2747
Кун 2672 К
Кунцман 2738 К
Курант 2597 К
Куратовский 2471
Курепа 2479
Куффиньяль 2786 РЕЦ

Л

Ладегаст 2635
Лазарева С. Е. 2680
Лам 2737 К
Ламбек 2502
Лантен 2781
Лаппо-Данилевский 2579 К
Лауренти 2601
Лёбелль 2708, 2709
Леви 2643
Ледерман 2530 К
Лейси 2681 К
Леман 2789 П
Либлейн 2649
Ловатер 2563, 2568
Лос 2772
Лукарони 2706
Лукасевич 2495
Люнцман 2731
Ляпин Е. С. 2535

М

Мак-Донал 2771
Малер 2510
Мамед-Заде К. Д. 2702 Д
Маранда 2527
Мартин 2584
Маршалл 2739 РЕЦ
Маршан 2604
Маттью 2788 П
Мейзлер Д. Г. 2648
Меррей 2775
Миньо 2726
Митчелл 2724
Мозер 2502
Морделл 2507
Морин 2695 К
Мостерт 2528
Муди 2805 К

Н

Набедзима 2561
Надь 2554, 2626, 2627

Неванлинна 2571 К, 2572 К
Невилл 2697
Нейсс 2522 РЕЦ
Несвадба 2792
Неф 2723
Ниренберг 2586
Нисневич Л. Б. 2634
Ноулер 2486 РЕЦ
Ньюман 2501

О

Обрешков Н. 2616
Оден 2621
Осборн 2493
Остапенко В. Н. 2592
Островский 2610 РЕЦ
Отто 2733

П

Пауэр 2585
Пенниси 2600
Перисастри 2689
Пи-Кальеха 2549
Пиккерт 2694 К
Пиранян 2563
Поллард 2636
Попова Н. В. 2564
Прайс 2486 РЕЦ
Пугачев В. С. 2644
Пул 2745

Р

Райхман 2754
Раух 2577
Рвачева Е. Л. 2640
Рейкорт 2665
Рейфенберг 2541
Рилли 2736
Рихерт 2498, 2499, 2500
Роджерс 2721
Роз 2488
Розенталл 2512
Розенфельд Б. А. 2793
Романовский В. И. 2664
Рорбах 2609 К
Роте 2606 К
Рылл-Нардзевский 2614
Рюссо 2551 РЕЦ

С

Саган 2787 РЕЦ
Сальвадори 2740 РЕЦ
Сарымсаков Т. А. 2641
Свирский И. В. 2628
Сегре 2801
Серрин 2566
Сибакаки 2613 РЕЦ
Синха 2650
Сироиси 2543
Скороход А. 2624
Скорца-Драгони 2608 К
Слуцкин 2785
Смирнов Н. В. 2654
Смирнова Е. Н. 2651
Снелл 2480
Спейн 2716 К
Спенсли 2742
Спенсли 2742
Спиди 2753
Сретенский Л. Н. 2803
Станклифф 2599
Стернлайт 2767
Сюше 2732

Т

Такасу 2477, 2482
Таккер 2672 К
Тамадян А. П. 2559
Тамм М. И. 2536 Д
Тебо 2691
Тейксидор 2704
Теодореску 2712
Терлецкий Я. П. 2714
Тиц 2688
Тодд 2509
Томсон 2785
Тролл 2533
Трусделл 2613 РЕЦ
Тьюс 2593

У

Уайз 2665
Уитт 2748
Улер 2521
Уоллес 2542
Уолтерс 2746
Уолш 2655
Уотсон 2506
Успенский В. А. 2487
Уц 2505
Уэлби 2758

Ф

Фейгль 2609 К
Феллер 2623
Флад 2603
Флюгге 2739 РЕЦ
Фог 2662
Фолькман 2547
Фрейзер 2677
Фридман 2607 К
Фукс 2523
Фурес-Брюа 2587
Фьельстедт 2511

Х

Хабовский 2728
Хадвигер 2719, 2722
Хадлок 2508
Харазов Д. Ф. 2620
Хартман 2718
Херман 2699
Херцбергер 2727
Хиггинс 2740 РЕЦ
Хислоп 2612 К
Ходаков В. А. 2552 Д
Хокинс 2486 РЕЦ
Холдейн 2670
Хопф 2545
Хофрейтер 2522 РЕЦ
Хуа Ло-гэн 2468
Хунгер 2573 РЕЦ

Ц

Цахариас 2698

Ч

Часар 2610 РЕЦ
Челидзе В. Г. 2611

Ш

Шаташвили С. Х. 2595
Шварц 2629
Шепердсон 2491
Шиффер 2596 К
Шлионский Г. 2562
Шмейдлер 2802
Шнейдер 2774
Шниад 2560
Шрейдер 2630
Шрикханде 2661
Штеэлин 2735
Шульгин Д. Ф. 2565

Щ

Щеглов М. П. 2615
Щелкачев В. Н. 2602

Э

Эйдельман С. Д. 2583
Эйдельнант М. И. 2666
Эйссен 2591
Элбурн 2748
Эллис 2625
Эрлей 2782

Ю

Юшкевич А. А. 2642

Я

Яблковский 2728
Яботинский 2558
Якубовский 2472
Яппа Ю. А. 2632 Д
Ярошенко Н. С. 2553 Д
Ястремский Б. С. 2667

A

Aissen M. 2591
Alaime R. 2684
Albers-Shoenberg E. 2755
Audin M. 2621
Aumann G. 2534

B

Backes F. 2683
Bacon R. H. 2657
Bade W. G. 2622
Baer R. 2524, 2525, 2526
Bambah R. P. 2720
Baron M. L. 2740 РЕЦ
Basch A. 2798, 2799
Basone N. 2646
Bennett H. S. 2588
Berger M. 2711
Bergman S. 2596 К
Berkeley E. C. 2766
Bhattacharya K. N. 2661
Bialkowsi L. S. 2693
Bieberbach L. 2580 К
Bing R. H. 2544
Blachman N. M. 2673
Blackman M. 2739 РЕЦ
Blaschke W. 2696 К
Blum E. K. 2532
Blunden W. R. 2753
Boehm J. 2734
Bonnell C. R. 2773
Bose R. C. 2661
Bourbaki N. 2546 К
Brauer A. 2517
Brdička M. 2529
Brenner-Holzach O. 2735
Brown D. R. 2755
Brusotti L. 2705
Buck R. C. 2567
Bundgaard S. 2555
Busemann H. 2700 К
Byrd P. F. 2607 К

C

Calabi L. 2540
Cambel A. B. 2774
Carleson L. 2574
Carlitz L. 2515, 2516, 2518, 2519
Cavallaro V. G. 2686
Chabowski L. 2728
Cohen K. J. 2494
Copi I. M. 2497 К
Corrington M. S. 2741
Corson E. M. 2715 К
Costa M. A. F. 2598
Couffignal L. 2786 РЕЦ
Courant 2597 К
Coxeter H. S. M. 2509
Craggs J. W. 2724
Cremer H. 2787 РЕЦ
Crosman L. P. 2747
Császár Á. 2610 РЕЦ
Curry D. R. 2730

D

David F. N. 2671 К
Davis R. C. 2645
Davis R. L. 2489
Dekker J. C. E. 2492
Delange H. 2503
Deltheil R. 2605 К
Denjoy A. 2551 РЕЦ
Des Raj 2659, 2660
Dieudonné J. 2496
Dobesch H. 2617
Dreyer H.-J. 2783
Duhamel J. 2594
Duncan D. G. 2533

Dungen, van den F. H. 2725
Duparc H. J. A. 2513

E

Elbourn R. D. 2748
Ellis D. 2625

F

Feigl G. 2609 К
Feller W. 2623
Fjellstedt L. 2511
Flood M. M. 2603
Flügge S. 2739 РЕЦ
Fog D. 2662
Fourès-Bruhat Y. 2587
Fraser D. A. S. 2677
Friedman M. D. 2607 К
Fuchs L. 2523

G

Gaier D. 2556, 2557
Geary R. C. 2656
Gel'fond A. O. 2569
Ginsburg S. 2548
Godeaux L. 2703
Goffman C. 2647
Goormaghtigh R. 2682
Görtler H. 2476
Gottschalk W. H. 2538
Gradštejn I. S. 2578
Greenwood R. E. 2633
Griselle Th. 2514
Gupta H. 2687
Gustin W. 2504

H

Hadlock E. H. 2508
Hadwiger H. 2719, 2722
Haldane J. B. S. 2670
Hartman Ph. 2718
Hawkins G. E. 2486 РЕЦ
Herrmann H. 2699
Herzberger M. 2727
Higgins Th. J. 2740 РЕЦ
Hilbert 2597 К
Hofreiter N. 2522 РЕЦ
Hopf H. 2545
Hunger F. 2573 РЕЦ
Hyslop J. M. 2612 К

I

Iglisch R. 2688
Isbell J. R. 2539

J

Jabłkowski J. 2728
Jabotinsky E. 2558
Jakubowski J. L. 2472
Jones B. W. 2508

K

Kaprekar D. R. 2520
Kathirgamatamby N. 2653
Keith R. J. 2753
Keller J. B. 2692
Kelly P. J. 2700 К
Knowler L. A. 2486 РЕЦ
Kober H. 2570
König R. 2573 РЕЦ
Krbek F. von 2713
Kuhn H. W. 2672 К
Kuntzmann J. 2738 К
Kuratowski K. 2471
Kurepa G. 2479

L

Lacey O. L. 2681 К
Ladegast K. 2635
Lambe C. G. 2737 К
Lambek J. 2502
Lappo-Danilevsky J. A. 2579 К
Laurenti F. 2601
Ledermann W. 2530 К
Lehmann J. 2789 П
Lentin A. 2781
Lévy P. 2643
Lieblein J. 2649
Löbell F. 2708, 2709
Lohwater A.-J. 2563, 2568
Loos R. H. 2772
Lucaroni R. 2706
Łukasiewicz J. 2495
Lünzmann K. 2731

M

McDonal F. J. 2771
Mahler K. 2510
Maranda J.-M. 2527
Marchand N. 2604
Marshall H. 2739 РЕЦ
Martin M. H. 2584
Matthew M. P. 2788 П
Mignot N. 2726
Mitchell A. R. 2724
Moody A. 2805 К
Mordell L. J. 2507
Morin U. 2695 К
Moser L. 2502
Mostert P. S. 2528
Murray W. 2775

N

Nef W. 2723
Neiß F. 2522 РЕЦ
Nesvadba J. 2792
Nevanlinna R. 2571 К, 2572 К
Neville E. H. 2697
Newman M. 2501
Nirenberg L. 2586
Sz.-Nagy B. 2554, 2626

O

Oerley W. A. 2782
Osborn R. 2493
Ostrowski A. 2610 РЕЦ
Otto A. 2733

P

Pennisi L. L. 2600
Perisastri M. 2689
Pí Calleja, P. 2549
Pickert G. 2694 К
Piranian G. 2563
Poel W. L. van der 2745
Pollard H. 2636
Power G. 2585
Price H. V. 2486 РЕЦ

R

Rajchman J. A. 2754
Rauch S. E. 2577
Reifenberg E. R. 2541
Reilly P. M. 2736
Richert H.-E. 2498, 2499, 2500
Rijkoort P. J. 2665
Rogers C. A. 2721
Rohrbach H. 2609 К
Rose G. F. 2488
Rosenthall E. 2512
Rothe R. 2606 К
Russo F. 2551 РЕЦ
Ryll-Nardzewski C. 2614

S

Sagan H. 2787 РЕЦ
Salvadory M. G. 2740 РЕЦ
Sanden H. von 2701 К
Schiffer M. 2596 К
Schmeidler W. 2802
Schneider P. J. 2774
Schwartz L. 2629
Scorza-Dragoni G. 2608 К
Segre B. 2801
Serrin J. 2566
Shepherdson J. C. 2491
Shniad H. 2560
Shrikhande S. S. 2661
Sinha P. 2650
Sluckin W. 2785
Snell K. S. 2480
Spain B. 2716 К
Speedy C. B. 2753
Spenceley G. W. 2742
Spenceley R. M. 2742
Šreĭder Y. A. 2630
Staehelin M. 2735
Stancliff F. 2599
Sternlight D. 2767
Suchet J. 2732

T

Takasu T. 2477, 2482
Teixidor J. 2704
Teodorescu N. 2712
Thebault V. 2691
Thews G. 2593
Thomson R. 2785
Thrall R. M. 2533
Tietz H. 2688
Todd J. A. 2509
Truesdell C. 2613 РЕЦ
Tucker A. W. 2672 К

U

Uhler H. S. 2521
Utz W. R. 2505

V

Vajda S. 2707
Van der Waerden B. L. 2663
Vand V. 2786 РЕЦ
Vogelsong J. H. 2756
Volkmann B. 2547

W

Waage E. 2690
Wallace A. D. 2542
Walsh J. E. 2655
Walters L. R. 2746
Watson G. L. 2506
Weise K. H. 2573 РЕЦ
Welby B. G. 2758
Wijngaarden A. van 2513
Wintner A. 2718
Wise M. E. 2665
Witt R. P. 2748
Witt E. 2531

Z

Zacharias M. 2698
Zakon E. A. 2550

კოკაია ვ. 2685

柴垣和三雄 2613 РЕЦ
臼石毅 2543
鷲島一郎 2561
華羅庚 2468